

Некоторые алгебраические преобразования

1. Какие значения может принимать выражение $(a|b| - b|a|)(b|c| - c|b|)(c|a| - a|c|)$?
2. Сколько целочисленных решений имеет неравенство $|x| + |y| < 100$?
3. Числа $1, 2, \dots, 100$ разбиты на две группы по 50 чисел.
 $a_1 < a_2 < \dots < a_{50}$ — числа первой группы, записанные в порядке возрастания.
 $b_1 > b_2 > \dots > b_{50}$ — числа второй группы, записанные в порядке убывания.
Докажите, что $|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \dots + |a_{50} - b_{50}| = 2500$.
4. Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x + 2y + 4z = 0$. Какие значения может принимать выражение

$$\frac{x^2}{8yz} + \frac{y^2}{xz} + \frac{8z^2}{xy}?$$

5. Найдите все возможные действительные t , для которых существуют действительные x, y и z такие, что $xy + yz + zx = 1$ и $\frac{x}{x^2 + 1} + \frac{y}{y^2 + 1} + \frac{z}{z^2 + 1} = \frac{t}{x + y + z - xyz}$.
6. Докажите, что если x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 — положительные числа, то

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2 \geq 4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1).$$