Теорема Паскаля

Теорема Паскаля: На окружности даны шесть точек $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ (не обязательно в таком порядке). Пусть $X = A_1A_2 \cap A_4A_5$, $Y = A_2A_3 \cap A_5A_6$, $Z = A_3A_4 \cap A_6A_1$. Тогда X, Y, Z лежат на одной прямой.

1. Внутри треугольника ABC выбрана точка M. Прямые AM, BM, CM пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках A', B', C' соответственно. Докажите, что главные диагонали шестиугольника, образованного пересечением треугольников ABC и $A'B'C'$, пересекаются в точке M.

2. Доказать, что во вписанном четырехугольнике точки пересечения противоположных сторон и точки пересечения касательных в противоположных вершинах лежат на одной прямой.

3. Дан прямоугольник $ABCD$ и точка P. Прямые, проходящие через A и B и перпендикулярные, соответственно, PC и PD, пересекаются в точке Q. Докажите, что $PQ \perp AB$.

4. **Лемма Веррьера.** Окружность касается сторон AB и BC треугольника ABC в точках P и Q соответственно, а также его описанной окружности. Докажите, что центр I вписанной в треугольник ABC окружности лежит на отрезке PQ.

5. Окружность, построенная на высоте BH треугольника ABC как на диаметре, пересекает стороны AB и BC в точках D и E соответственно. Прямые AE и CD пересекают окружность вторично в точках X и Y. Докажите, что $BX = BY$.

6. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$, O — центр описанной окружности, E — точка пересечения диагоналей. Точка F такова, что $CF \perp CD, FB \perp AB$. Докажите, что точки E, O и F лежат на одной прямой.

7. Хорда CD окружности с центром O перпендикулярна её диаметру AB, а хорда AE делит пополам радиус OC. Докажите, что хорда DE делит пополам хорду BC.

8. Пусть A' — точка, диаметрально противоположная точке A в описанной окружности треугольника ABC с центром O. Касательная к описанной окружности в точке A' пересекает прямую BC в точке X. Прямая OX пересекает стороны AB и AC в точках M и N. Докажите, что $OM = ON$.

9. Через центр O описанной окружности остроугольного треугольника ABC проведена прямая, пересекающая стороны AB, AC в точках X, Y. Эти точки отразили относительно середин сторон, на которых они лежат и получили точки X', Y'. Докажите, что $\angle X'HY' = \angle BAC$, где H — ортоцентр треугольника ABC.

10. В остроугольном треугольнике ABC угол A вдвое больше угла C. На биссектрисе угла A и на стороне AC отметили точки D и E соответственно так, что $\angle ADB = \angle AED = 90°$. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ADC лежит на прямой BE.