

Инварианты

1. В таблице 11×11 в каждой клетке стоит знак «+» или «-». За одну операцию разрешается поменять знак во всех клетках “креста” на противоположный. (*Крест* — объединения произвольного столбца и строки.) Верно ли, что из любого начального положения знаков можно получить таблицу со всеми плюсами?
2. Антон записал мелом на асфальте числа $1, 2, \dots, 1000$. Каждые 5 минут дождь смывает с асфальта по два числа. Вместо смытых чисел x и y Антон сразу же записывает на асфальт число $xу + x + y$. Докажите, что число, которое останется на асфальте последним, не зависит от того, в каком порядке дождь смывал числа. Чему равно это число?
3. Федя и Саша расставили по окружности 200 единиц. Каждую минуту в течение часа Федя выбирал какие-то 12 подряд идущих чисел, менял знак у каждого из них и записывал на те же места, но в обратном порядке. По истечении часа Саша поменял знак у 100 чисел, идущих через одно. Сколько единиц в результате могло получиться?
4. По кругу по часовой стрелке стоят числа $1, 2, 3, \dots, 2012$ (в указанном порядке). Если по кругу стоят подряд 4 числа a, b, c, d в указанном порядке, то разрешается одновременно заменить b на $a + c - d$ и c на $b + d - a$. Можно ли с помощью таких операций добиться того, чтобы с некоторого места числа стояли по кругу в следующем порядке $3, 2, 1, 4, 5, \dots, 2012$?
5. У Алины есть неограниченный запас конфет n видов: вида №1, вида №2, ..., вида № n . Кирилл взял несколько конфет и выложил их в ряд. Алина может проделывать с конфетами следующие две операции:
 - съесть конфету вида k , а вместо неё на её место положить конфеты вида $k - 1$ и $k + 1$ из запаса именно в таком порядке (на место конфеты вида 1 кладутся конфеты вида n и 2, а на место вида n — конфеты вида $n - 1$ и 1).
 - съесть две соседние конфеты, если они одного вида.При каких натуральных n Кирилл может изначально выложить конфеты так, чтобы Алине не удалось съесть все конфеты?
6. На доске написаны три числа $0, 1, \sqrt{2}$. Если на доске написаны числа x, y, z , то вместо x на доску можно записать $x + (y - z)r$, где r — какое-то рациональное число. Могут ли на доске получиться $0, 2, \sqrt{2}$?