

Геометрия параболы

1. Даны два квадратных трёхчлена f и g . Трёхчлен f принимает в некоторых точках значения 2, 3, 7, 10, а g в первых трёх из этих точек принимает значения соответственно 16, 15 и 11. Найдите значение трёхчлена g в четвёртой точке.
2. Дан квадратный трёхчлен $f(x)$. Всегда ли можно найти такой многочлен четвёртой степени $g(x)$, что уравнение $f(g(x)) = 0$ не имеет решений?
3. Квадратный трёхчлен $f(x) = x^2 + px + q$ таков, что уравнение $f(f(x)) = 0$ имеет ровно один корень. Докажите, что коэффициенты p и q неотрицательны.
4. Квадратный трёхчлен $f(x)$ переставляет местами различные числа a и b (т.е. $f(a) = b$, $f(b) = a$). Докажите, что он не переставляет местами никаких другие два числа.
5. (а) Дан квадратный трёхчлен $f(x)$ с вещественными коэффициентами. Пусть M – множество значений, которые он принимает при нечётных x , а N – множество значений, которые он принимает при чётных x . Докажите, что множества M и N могут быть либо совпадающими, либо непересекающимися. (б) Рассмотрим всевозможные приведённые квадратные трёхчлены $x^2 + px + q$ с целыми коэффициентами p и q . Назовём областью значений такого трёхчлена множество его значений во всех целых точках $x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Какое наибольшее количество таких трёхчленов можно выбрать, чтобы их области значений попарно не пересекались?
6. На координатной плоскости нарисованы графики двух приведённых квадратных трёхчленов и две непараллельные прямые l_1 и l_2 . Известно, что отрезки, отсекаемые графиками на l_1 , равны, и отрезки, отсекаемые графиками на l_2 , также равны. Докажите, что графики трёхчленов совпадают.
7. Вася выбирает на плоскости n точек и проводит всевозможные приведённые квадратные трёхчлены $f_1(x), \dots, f_k(x)$, пересекающие ось абсцисс в этих точках. Петя выписывает все уравнения вида $f_i(x) = f_j(x)$ и за каждый найденный корень каждого уравнения получает 1 рубль. Каков минимальный гарантированный доход Пети?
8. Известно, что квадратный трёхчлен $(b+c)x^2 + (a+c)x + (a+b)$ не имеет корней. Докажите, что $4ac - b^2 \leq 3a(a + b + c)$.