

## Геометрия параболы

1. Даны два квадратных трёхчлена  $f$  и  $g$ . Трёхчлен  $f$  принимает в некоторых точках значения 2, 3, 7, 10, а  $g$  в первых трёх из этих точек принимает значения соответственно 16, 15 и 11. Найдите значение трёхчлена  $g$  в четвёртой точке.
2. Дан квадратный трёхчлен  $f(x)$ . Всегда ли можно найти такой многочлен четвёртой степени  $g(x)$ , что уравнение  $f(g(x)) = 0$  не имеет решений?
3. Квадратный трёхчлен  $f(x) = x^2 + px + q$  таков, что уравнение  $f(f(x)) = 0$  имеет ровно один корень. Докажите, что коэффициенты  $p$  и  $q$  неотрицательны.
4. Квадратный трёхчлен  $f(x)$  переставляет местами различные числа  $a$  и  $b$  (т.е.  $f(a) = b$ ,  $f(b) = a$ ). Докажите, что он не переставляет местами никаких другие два числа.
5. (а) Дан квадратный трёхчлен  $f(x)$  с вещественными коэффициентами. Пусть  $M$  – множество значений, которые он принимает при нечётных  $x$ , а  $N$  – множество значений, которые он принимает при чётных  $x$ . Докажите, что множества  $M$  и  $N$  могут быть либо совпадающими, либо непересекающимися. (б) Рассмотрим всевозможные приведённые квадратные трёхчлены  $x^2 + px + q$  с целыми коэффициентами  $p$  и  $q$ . Назовём областью значений такого трёхчлена множество его значений во всех целых точках  $x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Какое наибольшее количество таких трёхчленов можно выбрать, чтобы их области значений попарно не пересекались?
6. На координатной плоскости нарисованы графики двух приведённых квадратных трёхчленов и две непараллельные прямые  $l_1$  и  $l_2$ . Известно, что отрезки, отсекаемые графиками на  $l_1$ , равны, и отрезки, отсекаемые графиками на  $l_2$ , также равны. Докажите, что графики трёхчленов совпадают.
7. Вася выбирает на плоскости  $n$  точек и проводит всевозможные приведённые квадратные трёхчлены  $f_1(x), \dots, f_k(x)$ , пересекающие ось абсцисс в этих точках. Петя выписывает все уравнения вида  $f_i(x) = f_j(x)$  и за каждый найденный корень каждого уравнения получает 1 рубль. Каков минимальный гарантированный доход Пети?
8. Известно, что квадратный трёхчлен  $(b+c)x^2 + (a+c)x + (a+b)$  не имеет корней. Докажите, что  $4ac - b^2 \leq 3a(a + b + c)$ .