Симметрия в доп построениях

1. Точка M – середина основания AC равнобедренного треугольника ABC. На продолжении отрезков AC и BC за точку C отмечены точки D и K так, что $BC = CD$ и $CM = CK$. Докажите, что описанные окружности треугольников ABD и MCK касаются.

2. Пусть BL – биссектриса треугольника ABC. Серединный перпендикуляр к отрезку BL пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точках P и Q. Докажите, что окружность, описанная около треугольника PLQ, касается стороны AC.

3. В остроугольном треугольнике ABC проведена биссектриса AL. На продолжении отрезка LA за точку A выбрана точка K так, что $AK = AL$. Описанные окружности треугольников BLK и CLK пересекают отрезки AC и AB в точках P и Q соответственно. Докажите, что прямые PQ и BC параллельны.

4. Равносторонний треугольник ABC вписан в окружность Ω и описан вокруг окружности ω. На сторонах AC и AB выбраны точки P и Q соответственно так, что отрезок PQ касается ω. Окружность Ω_b с центром P проходит через B, а окружность Ω_c с центром Q проходит через C. Докажите, что окружности Ω, Ω_b и Ω_c имеют общую точку.

5. В неравнобедренном треугольнике ABC провели биссектрисы угла ABC и угла, смежного с ним. Они пересекли прямую AC в точках B_1 и B_2 соответственно. Из точек B_1 и B_2 провели касательные к окружности, вписанной в треугольник ABC, отличные от прямой AC. Они касаются этой окружности в точках K_1 и K_2 соответственно. Докажите, что точки B, K_1 и K_2 лежат на одной прямой.

6. Точки P и Q лежат соответственно на сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ прямые AP и AQ пересекают BD в точках M и N соответственно, а отрезки PN и QM пересекаются в точке H. Докажите, что $AH \perp PQ$ тогда и только тогда, когда точки M, N, P и Q лежат на одной окружности.

7. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ отмечена точка E, а на стороне AD – точка F так, что описанная окружность треугольника ABE касается отрезка CF. Докажите, что описанная окружность треугольника CDF касается прямой AE.