Ещё считаем в синусах!

1. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Пусть K_1 и K_2 — точки на ω_1 и ω_2 соответственно такие, что K_1A касается ω_2, а K_2A касается ω_1. Описанная окружность треугольника K_1BK_2 пересекает вторично прямые AK_1 и AK_2 в точках L_1 и L_2 соответственно. Докажите, что точки L_1 и L_2 равноудалены от прямой AB.

2. Пусть $ABCD$ — вписанный четырехугольник, M, N — середины дуг AB и CD, I, J — центры вписанных окружностей ABD, CBD. Докажите, что MN делит IJ пополам.

3. В треугольник ABC вписана окружность ω с центром I, касающаяся сторон AB, BC, CA в точках M, N, P соответственно. T — точка пересечения CI и ω. $R = AT \cap MP$, $Q = BT \cap MN$. Докажите, что $RQ \perp IC$.

4. На стороне AB треугольника ABC взяты такие точки X, Y, что $AX = BY$. Прямые CX и CY вторично пересекают описанную окружность треугольника в точках U и V. Докажите, что все прямые UV проходят через одну точку.

5. Даны две окружности, касающиеся внутренним образом в точке N. Касательная к внутренней окружности, проведённая в точке K, пересекает внешнюю окружность в точках A и B. Пусть M — середина дуги AB, не содержащей точку N. Докажите, что радиус окружности, описанной около треугольника BMK, не зависит от выбора точки K на внутренней окружности.

6. Точка X, лежащая вне непересекающихся окружностей ω_1 и ω_2 такова, что отрезки касательных, проведённых из X к ω_1 и ω_2, равны. Докажите, что точка пересечения диагоналей четырёхугольника, образованного точками касания, совпадает с точкой пересечения общих внутренних касательных к ω_1 и ω_2.

7. Биссектриса угла ABC пересекает описанную окружность ω треугольника ABC в точках B и L. Точка M — середина отрезка AC. На дуге ABC окружности ω выбрана точка E так, что $EM \parallel BL$. Прямые AB и BC пересекают прямую EL в точках P и Q соответственно. Докажите, что $PE = EQ$.

8. Неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность ω. Касательная к этой окружности в точке C пересекает прямую AB в точке D. Пусть I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Прямые AI и BI пересекают биссектрису угла CDB в точках Q и P соответственно. Пусть M — середина отрезка PQ. Докажите, что прямая MI проходит через середину дуги ACB окружности ω.