

Поиск идей на маленьких 2

1. Саша выкладывает в ряд 2024 монеты. Каждую монету она кладет орлом или решкой вверх по своему выбору. После этого Аня называет Саше последовательность из 1012 орлов и решек. Саша должна удалить из своего ряда половину монет так, чтобы оставшиеся монеты слева направо образовывали последовательность, названную Аней. Сколько существует способов изначально положить монеты так, чтобы Саша смогла выполнить задание независимо от того, какую последовательность назовет Аня?
2. В алфавите $n > 1$ букв; словом является каждая конечная последовательность букв, в которой любые две соседние буквы различны. Слово называется *хорошим*, если из него нельзя вычеркнуть все буквы, кроме четырёх, так, чтобы осталась последовательность вида $aabb$, где a и b – различные буквы. Найдите наибольшее возможное количество букв в хорошем слове.
3. Назовём *лодочкой* трапецию с основаниями 1 и 3, получающуюся приклеиванием к противоположным сторонам единичного квадрата двух треугольничков (полуклеток). В квадрате 100×100 расположена невидимая лодочка (её можно поворачивать, она не выходит за границы квадрата, её средняя клетка целиком лежит на одной из клеток квадрата). Одним выстрелом можно накрыть любую треугольную половинку клетки. Если выстрел пересекается с внутренностью лодочки (т. е. пересечение треугольника выстрела с лодочкой имеет ненулевую площадь), то она считается потопленной. Какого наименьшего количества выстрелов достаточно, чтобы наверняка потопить лодочку?
4. Каждая грань куба $1000 \times 1000 \times 1000$ разбита на 1000^2 квадратных клеток со стороной 1. Какое наибольшее количество этих клеток можно закрасить так, чтобы никакие две закрашенные клетки не имели общей стороны?
5. Петя и Вася играют в игру. Для каждого из пяти различных переменных из набора x_1, \dots, x_{10} имеется единственная карточка, на которой записано их произведение. Петя и Вася по очереди берут по карточке, начинает Петя. Когда все карточки разобраны, Вася присваивает переменным значения как хочет, но так, что $0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{10}$. Может ли Вася гарантированно добиться того, чтобы сумма произведений на его карточках была больше, чем у Пети?