

Теорема Безу и количество корней многочлена

Теорема Безу: Многочлен $P(x)$ при делении на $x - a$ даёт остаток $P(a)$. В частности, a является корнем $P(x)$ тогда и только тогда, когда $P(x)$ делится на $x - a$.

1. Для различных вещественных чисел a, b, c, d устно раскройте скобки в выражении $a \frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)} + b \frac{(x-c)(x-d)(x-a)}{(b-c)(b-d)(b-a)} + c \frac{(x-d)(x-a)(x-b)}{(c-d)(c-a)(c-b)} + d \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)}$
2. Про многочлен $f(x) = x^{10} + a_9x^9 + \dots + a_0$ известно, что $f(1) = f(-1), \dots, f(5) = f(-5)$. Докажите, что $f(x) = f(-x)$ для любого действительного x .
3. Найдите все многочлены $P(x)$, такие что $xP(x-1) = (x-26)P(x)$.
4. Леша выписал на доске 100 различных чисел. Затем он увеличил все числа на один. Оказалось, что произведение чисел не изменилось. Затем он повторил операцию, и произведение чисел снова не изменилось. Какое наибольшее количество раз он мог повторить эту операцию, чтобы произведение чисел оставалось постоянным?
5. Множество из 2023 подряд идущих натуральных чисел назовем *прекрасным*, если его можно разбить на два подмножества с равными произведениями. Докажите, что прекрасных множеств конечно.
6. Докажите, что ненулевой многочлен от двух переменных $P(x, y)$ не может везде принимать нулевое значение.
7. Многочлен 10 степени таков, что $P(n) = \frac{1}{n}$ для всех $n = 1, \dots, 11$. Найдите значение $P(12)$.