

## Теорема Безу и количество корней многочлена

**Теорема Безу:** Многочлен  $P(x)$  при делении на  $x - a$  даёт остаток  $P(a)$ . В частности,  $a$  является корнем  $P(x)$  тогда и только тогда, когда  $P(x)$  делится на  $x - a$ .

1. Для различных вещественных чисел  $a, b, c, d$  устно раскройте скобки в выражении  $a \frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)} + b \frac{(x-c)(x-d)(x-a)}{(b-c)(b-d)(b-a)} + c \frac{(x-d)(x-a)(x-b)}{(c-d)(c-a)(c-b)} + d \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)}$
2. Про многочлен  $f(x) = x^{10} + a_9x^9 + \dots + a_0$  известно, что  $f(1) = f(-1), \dots, f(5) = f(-5)$ . Докажите, что  $f(x) = f(-x)$  для любого действительного  $x$ .
3. Найдите все многочлены  $P(x)$ , такие что  $xP(x-1) = (x-26)P(x)$ .
4. Леша выписал на доске 100 различных чисел. Затем он увеличил все числа на один. Оказалось, что произведение чисел не изменилось. Затем он повторил операцию, и произведение чисел снова не изменилось. Какое наибольшее количество раз он мог повторить эту операцию, чтобы произведение чисел оставалось постоянным?
5. Множество из 2023 подряд идущих натуральных чисел назовем *прекрасным*, если его можно разбить на два подмножества с равными произведениями. Докажите, что прекрасных множеств конечно.
6. Докажите, что ненулевой многочлен от двух переменных  $P(x, y)$  не может везде принимать нулевое значение.
7. Многочлен 10 степени таков, что  $P(n) = \frac{1}{n}$  для всех  $n = 1, \dots, 11$ . Найдите значение  $P(12)$ .