

Симметрия

1. На сторонах угла с вершиной O отметили точки A_1 и A_2 на одной стороне, и B_1 и B_2 – на другой стороне. Оказалось, что $OA_1 = OB_1$ и $OA_2 = OB_2$. Докажите, что точка пересечения отрезков A_1B_2 и A_2B_1 лежит на биссектрисе угла.
2. Дана окружность и точка O на ней. Вторая окружность с центром O пересекает первую в точках P и Q . Точка C лежит на первой окружности, а прямые CP и CQ вторично пересекают вторую окружность в точках A и B соответственно. Докажите, что $AB = PQ$.
3. Внутри равнобокой трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD расположена окружность ω с центром I , касающаяся отрезков AB , CD и DA . Описанная окружность треугольника BIC вторично пересекает сторону AB в точке E . Докажите, что прямая CE касается окружности ω .
4. Вначале на плоскости были отмечены три различные точки. Каждую минуту выбирались некоторые три из отмеченных точек — обозначим их A , B и C , после чего на плоскости отмечалась точка D , симметричная A относительно серединного перпендикуляра к BC . Через сутки оказалось, что среди отмеченных точек нашлись три различные точки, лежащие на одной прямой. Докажите, что три исходных точки также лежали на одной прямой.
5. На стороне CD ромба $ABCD$ нашлась такая точка K , что $AD = BK$. Пусть F – точка пересечения диагонали BD и серединного перпендикуляра к стороне BC . Докажите, что точки A , F и K лежат на одной прямой.
6. Дан параллелограмм $ABCD$ ($AB < BC$). Докажите, что окружности, описанные около треугольников APQ , для всевозможных точек P и Q , выбранных на сторонах BC и CD соответственно так, что $CP = CQ$, имеют общую точку, отличную от A .
7. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) средняя линия, параллельная стороне BC , пересекается со вписанной окружностью в точке F , не лежащей на основании AC . Докажите, что касательная к окружности в точке F пересекается с биссектрисой угла ACB на стороне AB .