

Двусвязность

Определение. Вершина v связного графа G называется *точкой сочленения*, если при удалении вершины v граф G теряет связность. Граф G называется *двусвязным*, если он связан и сохраняет связность при удалении любой вершины.

Определение. *Блоком* связного графа G называется максимальный по включению двусвязный подграф графа G .

1. Пусть G — связный граф, а B_1 и B_2 — два различных блока этого графа. Докажите, что
 - (а) множества вершин блоков B_1 и B_2 пересекаются не более чем по одной вершине;
 - (б) если B_1 и B_2 пересекаются ровно по одной вершине, то эта вершина — точка сочленения.

Определение. Пусть B_1, \dots, B_n — все блоки связного графа G , а a_1, \dots, a_m — все точки сочленения графа G . Построим *дерево блоков и точек сочленения* $B(G)$ с вершинами $B_1, \dots, B_n, a_1, \dots, a_m$, в котором вершины a_i и B_j соединены ребром тогда и только тогда, когда точка сочленения a_i является одной из вершин блока B_j .

2. Докажите, что дерево блоков и точек сочленения связного графа действительно является деревом, причем все его висячие вершины соответствуют блокам.

Определение. Граф называется *кактусом*, если любое его ребро лежит ровно в одном простом цикле.

3.
 - (а) Докажите, что все блоки кактуса — простые циклы.
 - (б) Докажите, что если в связном графе без мостов все простые циклы нечётные — это кактус.
4. Докажите, что утверждения ниже эквивалентны двусвязности графа G (при $|V| > 2$):
 - (а) для любых трех вершин A, B, C существует простой путь от A до B , не содержащий C ;
 - (б) (**Теорема Менгера**) любые две вершины G лежат в общем простом цикле;
 - (в) любая вершина и ребро лежат в общем простом цикле;
 - (г) любые два ребра лежат в общем простом цикле;
 - (д) для любых двух вершин A, B и любого ребра e существует простой от A до B , содержащий ребро e ;
 - (е) для любых трех вершин A, B, C существует простой путь от A до B , проходящий через C .

5. В некотором государстве было 2024 городов, соединенных дорогами так, что если запретить проезд через любой из городов, то из любого из оставшихся городов можно добраться до любого другого. Каждый год король выбирает некоторый несамопересекающийся циклический маршрут и приказывает построить новый город, соединить его дорогами со всеми городами выбранного маршрута, а все дороги этого маршрута закрыть за ненадобностью. Через несколько лет в стране не осталось ни одного несамопересекающегося циклического маршрута, проходящего по ее городам. Докажите, что в этот момент количество городов, из которых выходит ровно одна дорога, не меньше 2024.
6. Про данный двусвязный граф известно, что при удалении любых двух несмежных вершин граф потеряет связность. Докажите, что тогда граф является простым циклом.
7. В графе расстояние между любыми вершинами не превосходит $d(d > 1)$, и для любой вершины есть другая на расстоянии d от неё. Докажите, что в этом графе есть простой цикл, содержащий не менее $2d$ вершин.
8. В связном графе ровно k висячих вершин и нет вершин степени 2. Любой путь между любыми двумя висячими вершинами содержит не меньше четырёх ребер. Докажите, что в этом графе есть остовное дерево с не менее чем $k + 1$ висячей вершиной.