Многочлены и корни

Ранее было доказано, что:
— у любого многочлена есть корень (возможно, комплексный);
— любой многочлен степени n раскладывается на n множителей первой степени (возможно, с комплексными коэффициентами);
— любой многочлен с действительными коэффициентами раскладывается на множители с действительными коэффициентами степени не выше 2 (в частности, у любого многочлена нечётной степени будет множитель степени 1, а значит, действительный корень).

1. $P(x)$ — многочлен нечетной степени. Докажите, что у уравнение $P(P(x)) = 0$ не меньше различных действительных корней, чем у уравнения $P(x) = 0$.

2. Приведенный квадратный трехчлен $f(x)$ имеет 2 различных корня. Может ли так оказаться, что уравнение $f(f(x)) = 0$ имеет 3 различных корня, а уравнение $f(f(f(x))) = 0$ — 7 различных корней?

3. Произведение квадратных трехчленов $x^2 + a_1x + b_1, x^2 + a_2x + b_2, \dots, x^2 + a_nx + b_n$ равно многочлену степени $2n$, у которого все коэффициенты положительны. Докажите, что хотя бы у одного из исходных квадратных трёхчленов все коэффициенты положительны.

4. $a_1, a_2, \dots, a_{997}$ - действительные числа. Какое наибольшее количество различных действительных корней может быть у многочлена
$$x^{1000} + a_{997}x^{997} + a_{996}x^{996} + \dots + a_1x + a_0 \ ?$$

5. Дан многочлен $P(x)$ степени n с действительными коэффициентами. Известно, что у уравнение $P(P(P(x))) = P(x)$ ровно n^3 различных действительных корней. Докажите, что эти n^3 корней можно разбить на две группы с равными средними арифметическими.

6. Назовём многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами *маленьким*, если $|f(n)| \leqslant 1000^n$ при всех натуральных $n > 1000$. Конечно ли множество маленьких многочленов?

7. Докажите, что существует константа $C > 2$, для которой верно следующее утверждение: ”Пусть n — натуральное число, а $P(x)$ — приведённый многочлен n-ой степени с целыми коэффициентами, имеющий n различных действительных корней. Предположим, что все эти корни больше единицы и отличны от двойки. Тогда произведение этих корней не меньше, чем C^n.”