Разнобой

1. Клетки таблицы 15×15 покрашены в три цвета. Докажите, что можно выбрать некоторый цвет и две строки так, чтобы в них было одинаковое количество клеток этого цвета.

2. В каждую клетку таблицы 1001×1001 поставили 0 или 1. Оказалось, что в любом столбце нулей больше, чем единиц. Обязательно ли найдутся два столбца таких, что число строк, в пересечениях которых с этими двумя столбцами стоят только нули, больше числа строк, в пересечениях которых с этими двумя столбцами стоят только единицы?

3. Даны различные натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{14}$. На доску выписаны все 196 чисел вида $a_k + a_l$, где $1 \leqslant k, l \leqslant 14$. Может ли оказаться, что для любой комбинации из двух цифр среди написанных на доске чисел найдется хотя бы одно число, оканчивающееся на эту комбинацию (то есть, найдутся числа, оканчивающиеся на 00, 01, 02,…, 99)?

4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Пусть A_1P — высота треугольника $A_1B_1C_1$. Серединный перпендикуляр к отрезку BC пересекает отрезок B_1C_1 в точке Q. Докажите, что точки B, P, Q, C лежат на одной окружности.

5. Для каждого натурального n обозначим через S_n сумму первых n простых чисел: $S_1 = 2, S_2 = 2 + 3, S_3 = 2 + 3 + 5, \ldots$. Могут ли два подряд идущих члена последовательности S_n оказаться квадратами натуральных чисел?

6. Известно, что некоторые сенаторы между собой в ссоре. Проверено, однако, что как бы мы не посадили их всех или любую группу (3 или более) из них по кругу, найдется пара соседей не в ссоре. Весь сенат усадили за круглый стол. Если два соседа не в ссоре, они могут поменяться местами. Докажите, что сенаторы могут расположиться в любом круговом порядке (порядки, полученные поворотом, не различаются).

7. Некоторые натуральные числа отмечены. Известно, что на каждом отрезке числовой прямой длины 1999 есть отмеченное число. Докажите, что найдётся пара отмеченных чисел, одно из которых делится на другое.

8. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Окружность с центром в точке O_b проходит через точки A, C_1 и середину отрезка BH. Окружность с центром в точке O_c проходит через точки A, B_1 и середину отрезка CH. Докажите, что $B_1O_b + C_1O_c > \dfrac{BC}{4}$.