

Делимость

1. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, каждое из которых делится на количество его натуральных делителей.
2. Докажите, что среди любых 9 натуральных чисел, взаимно простых с 1001, найдутся два, сумма которых также будет взаимно проста с 1001.
3. Найдите все пятизначные числа, состоящие из ненулевых цифр, такие, что, каждый раз зачеркивая первую цифру, мы получаем делитель предыдущего числа.
4. Натуральные числа a, b, c таковы, что

$$a + c = 2023202320232023 \quad \text{и} \quad (5a - b)(c + b) = b^2$$

Докажите, что у чисел a, b, c есть общий делитель, больший 1.

5. Последовательность $\{a_n\}$ такова, что $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n^2 + a_n$ для натуральных n . Докажите, что при каждом натуральном k число $a_{(k+1)!} - a_{k!}$ делится на k .