Тренировочная олимпиада

1. Натуральное число из различных ненулевых цифр назовём *уникальным*, если его можно представить в виде разности двух чисел, каждое из которых является перестановкой цифр самого уникального числа, причём в уменьшаемом цифры стоят в убывающем порядке, а в вычитаемом — в возрастающем. Докажите, что существует единственное трёхзначное уникальное число.

2. В классе учатся 25 человек, причём есть и мальчики, и девочки. Каждый мальчик сказал: «У меня подруг на одну больше, чем друзей-мальчиков». Каждая девочка сказала: «У меня друзей-мальчиков на одного больше, чем подруг». Докажите, что чья-то дружба не взаимна.

3. Про положительные числа a, b, c и d известно, что

$$\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{d} = \frac{c+d}{a} = \frac{d+a}{b}.$$

Докажите, что сумма каких-то двух из них равна сумме двух других.

4. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки X и Y так, что $AX = BY$ и при этом $\angle XYB = \angle BAC$. Точка B_1 — основание биссектрисы угла B. Докажите, что прямые XB_1 и YC параллельны.

5. В школе учатся n школьников, и некоторые из них ходят на кружки. Каждый школьник может ходить на любое количество кружков, но на любой кружок ходит хотя бы два школьника. Известно, что если какие-то два школьника оба ходят на какие-то два кружка, то на эти кружки ходит различное количество школьников. Докажите, что количество кружков не превосходит $(n-1)^2$.