

Предновогодний разнобой

1. Игра начинается с числа 1000. За ход разрешается вычесть из имеющегося числа любое, не превосходящее его, натуральное число, являющееся степенью двойки (можно вычитать $1 = 2^0$). Выигрывает тот, кто получит ноль.
 2. Решите уравнение $x^8 + y^8 + z^8 + 5 = 8xyz$.
 3. Есть таблица 15×100 (15 столбцов, 100 строк). В каждой строке в каких-то двух клетках стоит по фишке. Каждая следующая строка отличается от предыдущей положением ровно одной фишки: та сдвигается либо вправо, либо влево на одну клетку. Докажите, что есть две строки, в которых фишки стоят на одинаковых позициях.
 4. Докажите, что для любого простого p число $2^{2^p} - 4$ делится на $2^p - 1$.
 5. Дан прямоугольник $ABNK$, M — середина стороны AB . На луче KM выбрана точка C так, что $\angle KAC = 135^\circ$. Прямая CB пересекает сторону KN в точке L . Докажите, что $KL = BN$.
 6. В треугольник ABC вписана полуокружность, диаметр которой принадлежит стороне BC . Стороны AB и AC касаются полуокружности соответственно в точках C_1 и B_1 . Докажите, что прямые BB_1 и CC_1 пересекаются на высоте AA_1 треугольника ABC .
 7. У генерала в подчинении находятся n солдат, пронумерованные от 1 до n . В день D происходит следующее:
 - первые k солдат предают генерала ($0 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor$);
 - среди оставшихся солдат, генерал выбирает k человек, чтобы сразиться с предателями.
- Сколько существует различных «сценариев», как может пройти день D ?
8. Великан-сладкоежка ест четыре торта: 28,8 кг, 20 кг, 16,2 кг и 12,8 кг. Каждый торт он ест с постоянной скоростью, а на все четыре торта ушло 13 минут. Если бы великан ел каждый торт только по 1 минуте, то всего он съел бы всего 23,4 кг сладкого. С какой скоростью он ел второй торт?