

## Красим плоскость

**Соглашение.** Если в задаче говорится, что плоскость (пространство, прямая и т. п.) окрашена в  $n$  цветов, то имеется в виду, что каждая точка окрашена в один из  $n$  цветов, причём каждым из этих  $n$  цветов окрашена хотя бы одна точка плоскости (пространства, прямой и т. п.).

1. Плоскость (соответственно пространство) окрашена в два (соответственно в три) цвета. Докажите, что найдутся две точки
  - (а) одного цвета,
  - (б) разных цветов,расстояние между которыми равно 1.
2.
  - (а) Плоскость окрашена в два цвета.
  - (б) Плоскость окрашена в  $n$  цветов.Докажите, что найдется прямоугольник вершины которого окрашены в один цвет.
3. Плоскость окрашена в три цвета. Докажите, что найдется прямоугольный треугольник с вершинами трех разных цветов.
4. Можно ли раскрасить плоскость (соответственно пространство) в три (соответственно в четыре) цвета так, чтобы любая прямая (соответственно плоскость) оказалась окрашена ровно в два (соответственно ровно в три) цвета?
5. Плоскость (соответственно пространство) окрашена в три (соответственно в четыре) цвета. Докажите, что найдутся две точки одного цвета, расстояние между которыми равно 1.
6. Раскрасьте плоскость в семь цветов так, чтобы любые две точки, расстояние между которыми равно 1, оказались окрашенными в разные цвета.
7. Пространство окрашено в пять цветов. Докажите, что найдется
  - (а) плоскость, окрашенная не менее, чем в 4 цвета.
  - (б) прямая, окрашенная не менее, чем в 3 цвета.
8. Плоскость окрашена в два цвета: красный и синий. Докажите, что либо для любого положительного  $l$  найдется отрезок длины  $l$  с синими концами, либо для любого треугольника найдется равный ему треугольник с красными вершинами (либо и то и другое).