Разные задачи про комплексные числа

1. Докажите, что $\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}=-1$.

2. Комплексные числа x, y, z таковы, что $|x|=|y|=|z|=1$. Докажите, что

$$|x+y+z|=|xy+yz+zx|.$$

3. Докажите, что для любых комплексных чисел $z_1, z_2, \ldots, z_n$, удовлетворяющих условию

$$|z_1|^2+|z_2|^2+\ldots+|z_n|^2=1,$$

можно выбрать такие $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, каждое из которых равно 1 или -1, так, что

$$|\alpha_1 z_1+\alpha_2 z_2+\ldots+\alpha_n z_n|\leqslant 1.$$

Радикальные оси

Определение *Радикльная ось* двух окружностей — геометрическое место точек, степени которых относительно этих окружностей равны.

• Рад. ось проходит через точки пересечения окружностей (если окружности пересекаются.
• Рад. ось делит общую касательную пополам.
• Рад. ось перпендикулярна линии центров.
• Геометрическое место точек таких, что разность их степеней относительно двух окружностей постоянна — прямая, параллельная рад. оси (в частности, для рад. оси разность степеней точки равна нулю).
• **(Полезная мысль)** Точка — есть окружность радиуса 0.

1. На прямой расположены последовательно точки A, B, C и D таким образом, что $AB : BC : CD = 1 : 2 : 3$. Одна окружность проходит через точки A и C, а другая — через точки B и D. Докажите, что общая хорда этих окружностей делит отрезок AC пополам.

2. В треугольнике ABC проведена медиана BM. Окружность ω_1 проходит через вершины A и B и делит отрезок CM пополам, а окружность ω_2 проходит через вершины C и B и делит отрезок AM пополам. Докажите, что медиана треугольника ABC перпендикулярна линии центров этих окружностей.

3. Дан шестиугольник $ABCDEF$, в котором $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$, а углы A и C — прямые. Докажите, что прямые FD и BE перпендикулярны.

4. На продолжении боковой стороны BA (за точку A) равнобедренного треугольника ABC с основанием BC выбрана точка P. Пусть M и N — середины касательных PX и PY к описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что прямая, параллельная BC и проходящая через точку P, прямая MN и касательная в точке B к окружности пересекаются в одной точке.

5. Серединный перпендикуляр к стороне AC неравнобедренного остроугольного треугольника ABC пересекает прямые AB и BC в точках B_1 и B_2 соответственно, а серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает прямые AC и BC в точках C_1 и C_2 соответственно. Описанные окружности треугольников BB_1B_2 и CC_1C_2 пересекаются в точках P и Q. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABC лежит на прямой PQ.

6. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. BL и CN — биссектрисы треугольников ABD и ACD соответственно. Окружности, описанные вокруг треугольников ABL и CDN, пересекаются в точках P и Q. Докажите, что прямая PQ проходит через середину дуги AD, не содержащей точку B.

7. На диагоналях трапеции как на диаметрах построили окружности. Докажите, что прямая содержащая их общую хорду проходит через точку пересечения боковых сторон трапеции.

8. В треугольнике ABC на сторонах AB и AC отмечены такие точки D и E, что $BD = BC = CE$. Докажите, что прямая DE перпендикулярна прямой, соединяющей центр вписанной и описанной окружности треугольника ABC.

9. Высоты AA_1 и BB_1 остроугольного неравнобедренного треугольника ABC пересекаются в точке H. Пусть точка P — точка пересечения описанных окружностей треугольников ABC и A_1B_1C, а S — точка пересечения прямых A_1B_1 и AB. **(а)** Докажите, что точки C, P и S лежат на одной прямой. **(б)** Докажите, что прямая SH перпендикулярна медиане треугольника ABC.