Основная теорема алгебры

Основная теорема алгебры. Любой непостоянный многочлен с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень.

Главная цель этого листика — доказать эту теорему.

Напоминание. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

1. **(а)** Докажите, что для $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ верно $|z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.
(б) Докажите, что для любого $z \in \mathbb{C}$ и натурального n существует такое $u \in \mathbb{C}$, что $u^n = z$ (в комплексных числах извлекается корень любой степени).

Идея доказательства теоремы следующая: для любого многочлена $p(z)$ рассмотрим минимум функции $|p(z)|$ и покажем, что если он не равен нулю, то можно найти точку, в которой значение ещё меньше. Первый вопрос здесь такой: почему $|p(z)|$ вообще достигает минимального значения?

2. Пусть $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0, a_i \in \mathbb{C}, n > 1$.
(а) Пусть $\varphi(t) = t^n(1 - \frac{|a_{n-1}|}{t} - \ldots - \frac{|a_0|}{t^n})$. Докажите, что $|p(z)| > \varphi(|z|)$.
(б) Докажите, что существует радиус $0 < A \in \mathbb{R}$ такой, что $|p(z)| > |p(0)|$ для всех $z \in \mathbb{C}$, таких что $|z| > A$. Т.е. вне круга радиуса A с центром в 0 значение функции $|p(z)|$ превосходит $|p(0)| = |a_0|$.
(в) Давайте будем верить, что функция $|p(z)|$ достигает минимума в круге радиуса R. Выведите из этого, что в некоторой точке a функция $|p(z)|$ достигает минимума на всём $\mathbb{C}$.

И так, пусть теперь a это точка, где достигается минимум функции $|p(z)|$ и $|p(a)| \neq 0$. Нам осталось прийти к противоречию, показав, что есть ещё меньшее значение функции.

3. **(а)** Переходя от многочлена $p(z)$ к многочлену $\frac{p(z+a)}{p(a)}$ поймите, что можно считать, что $a = 0$ и $p(a) = 1$.
(б) Сделав подходящую замену cz покажите, что можно считать, что $p(z) = 1 - z^k + b(z)$, где $b(z) = b_{k+1}z^{k+1} + \ldots + b_n z^n$.

4. **(а)** Докажите, что при достаточно маленьких действительных $x > 0$ выполнено неравенство $x^k > |b(x)|$.
(б) Докажите, что при достаточно маленьких действительных $x > 0$ выполнено неравенство $|p(x)| \leqslant 1 - x^k + |b(x)| < 1$.
(в) Докажите основную теорему алгебры. Покажите, что любой многочлен с комплексными коэффициентами степени n имеет n корней (с учётом кратности).

5. **(а)** Пусть $P(x)$ многочлен с действительными коэффициентами и $z \in \mathbb{C}$ его корень. Покажите, что $\overline{z}$ тоже его корень.
(б) Докажите, что неприводимыми над $\mathbb{R}$ многочленами являются многочлены первой степени и многочлены второй степени с отрицательным дискриминантом. (В частности любой многочлен с действительными коэффициентами раскладывается в произведение таковых.)

6. Докажите, что многочлен (с коэффициентами в $\mathbb{R}$), принимающий неотрицательные значения на всей действительной оси, представляется в виде суммы квадратов двух многочленов с вещественными коэффициентами.