

Композиция движений плоскости

- 1. Докажите, что композиция двух центральных симметрий является параллельным переносом.
0. а) Прямые l_1 и l_2 параллельны. Докажите, что $S_{l_2} \circ S_{l_1} = T_{\vec{2a}}$, где \vec{a} — вектор, направленный от l_1 к l_2 , перпендикулярный им, по длине равный расстоянию между ними.
б) Прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке O . Докажите, что $S_{l_2} \circ S_{l_1} = R_O^{2\alpha}$, где $\alpha = \angle(l_1, l_2)$.

1. Чем является композиция двух поворотов?

2. Докажите, что если произвольную точку последовательно отразить относительно точек O_1, O_2 и O_3 , а затем ещё раз последовательно отразить относительно этих же точек, то она вернётся на место.
3. а) Докажите, что ограниченная фигура не может иметь более одного центра симметрии.
б) Докажите, что никакая фигура не может иметь ровно двух центров симметрии.
4. а) Докажите, что если фигура имеет две перпендикулярные оси симметрии, то у неё есть центр симметрии.
б) Докажите, что если плоская фигура имеет ровно две оси симметрии, то эти оси перпендикулярны.
5. Даны три прямые a, b, c . Пусть $M = S_c \circ S_b \circ S_a$. Докажите, что $M \circ M$ — параллельный перенос (или тождественное преобразование).
6. Докажите, что если многоугольник имеет несколько (больше двух) осей симметрии, то все они пересекаются в одной точке.

Движение плоскости — преобразование плоскости, сохраняющее расстояние между точками.

7. а) Докажите, что если при движении плоскости три точки, не лежащие на одной прямой, остаются неподвижными, то это движение — тождественное преобразование.
б) Докажите, что если при некотором движении плоскости F точка A переходит в точку A' , то существует такая осевая симметрия S , что движение $S \circ F$ оставляет на месте точку A , а также все неподвижные точки движения F .
в) (**Теорема Шаля.**) Докажите, что любое движение плоскости является композицией не более, чем трёх осевых симметрий.
8. Докажите, что любое движение плоскости является поворотом, параллельным переносом или скользящей симметрией (т.е. композицией осевой симметрии и параллельного переноса на вектор, параллельный оси симметрии).