

## Индукция начинается с просмотра на маленькие

1. В поликлинике есть журнал, в котором  $n$  строк. Когда приходит пациент, его фамилию должны вписать в некоторую строку журнала (в одной строке может быть только одна фамилия, в нашем мире все фамилии различны). Сейчас журнал пуст, завтра должно прийти 2023 пациента. При каком наименьшем  $n$  гарантированно можно вписать их в журнал так, чтобы фамилии шли в алфавитном порядке?
2. На доске нарисован выпуклый  $n$ -угольник ( $n \geq 4$ ). Каждую его вершину надо окрасить либо в чёрный, либо в белый цвет. Назовём диагональ *разноцветной*, если её концы окрашены в разные цвета. Раскраску вершин назовём *хорошей*, если  $n$ -угольник можно разбить на треугольники разноцветными диагоналями, не имеющими общих точек (кроме вершин). Найдите количество хороших раскрасок.
3. На столе есть две кучки камней, в которых соответственно 100 и 101 камень. Двое играют в игру, делая ходы по очереди. За ход разрешается взять кучку, убрать из неё какое-то количество камней (хотя бы один) и разбить оставшиеся в этой кучке камни на две непустые кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре: тот, кто делает первый ход, или его соперник?
4.  $N$  точек на окружности раскрасили в 4 цвета. Потом соединили отрезками одноцветные точки. Для какого максимального  $N$  точки можно покрасить так, чтобы нельзя было выбрать 4 непересекающихся отрезка? (Отрезки с общими концами тоже считаются пересекающимися.) (а) Обобщите полученный ответ и докажите его.
5. На плоскости нарисована ломаная, у которой никакие три вершины не лежат на одной прямой. На каждом звене написано количество других звеньев, которые оно пересекает. Известно, что среди выписанных чисел есть все целые числа от 0 до 2023. Какое наименьшее число звеньев может содержать эта ломаная?
6. На каждом ребре полного графа с 2000 вершинами написано число 1, 2 или 3 так, что сумма чисел на рёбрах каждого треугольника не меньше 5. Какова наименьшая возможная сумма всех чисел на рёбрах?
7. В классе  $m$  учеников. В течение сентября каждый из них несколько раз ходил в бассейн; никто не ходил дважды в один день. Первого октября выяснилось, что все количества посещений бассейна у учеников различны. Более того, для любых двух из них обязательно был день, когда первый из них был в бассейне, а второй – нет, и день, когда, наоборот, второй из них был в бассейне, а первый – нет. Найдите наибольшее возможное значение  $m$ . (В сентябре 30 дней.)