

КБШ

Все переменные в листике по умолчанию являются положительными.

1. **Неравенство Коши-Буняковского-Шварца.** Докажите, что

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2.$$

В каком случае достигается равенство?

2. **КБШ для дробей а.к.а неравенство Седракяна а.к.а лемма Титу.** Докажите, что

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}.$$

В каком случае достигается равенство?

- 3.

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}.$$

- 4.

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{(a+b+c)^2}{ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)}.$$

- 5.

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2.$$

- 6.

$$3\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) \geq 4\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right)^2.$$

- 7.

$$\frac{a^3 + 3b^3}{5a+b} + \frac{b^3 + 3c^3}{5b+c} + \frac{c^3 + 3a^3}{5c+a} \geq \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

- 8.

$$\sqrt{3a^2 + ab} + \sqrt{3b^2 + bc} + \sqrt{3c^2 + ca} \leq 2(a+b+c).$$

- 9.

$$\frac{a}{2a+b} + \frac{b}{2b+c} + \frac{c}{2c+a} \leq 1.$$

10. При $abc = 1$ докажите, что

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$