Теорема Виета для многочленов

Теорема Виета. Пусть многочлен $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ имеет корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=-\frac{a_{n-1}}{a_n},$$
$$x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n=\frac{a_{n-2}}{a_n},$$
$$\ldots$$
$$\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant n} x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}=(-1)^k\frac{a_{n-k}}{a_n},$$
$$\ldots$$
$$x_1x_2\ldots x_n=(-1)^n\frac{a_0}{a_n}.$$

1. Пусть x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3-2x^2+x+1=0$. Составьте кубическое уравнение, корнями которого являются числа $\frac{1}{x_1^2}, \frac{1}{x_2^2}, \frac{1}{x_3^2}$.

2. У многочлена с целыми коэффициентами x^3+px+q имеется три различных корня. Докажите, что сумма кубов этих корней есть целое число, кратное трём.

3. Известно, что $a+b+c=d$, и что
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{d}$$
Докажите, что по меньшей мере одно из чисел a, b и c равно d.

4. Даны такие действительные числа $a_1\leqslant a_2\leqslant a_3$ и $b_1\leqslant b_2\leqslant b_3$, что
$$a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3,$$
$$a_1a_2+a_2a_3+a_1a_3=b_1b_2+b_2b_3+b_1b_3.$$
Докажите, что если $a_1\leqslant b_1$, то $a_3\leqslant b_3$.

5. На доске написано несколько приведённых многочленов 37-й степени, все коэффициенты которых неотрицательны. Разрешается выбрать любые два выписанных многочлена f и g и заменить их на такие два приведённых многочлена 37-й степени f_1 и g_1, что $f+g=f_1+g_1$ или $fg=f_1g_1$. Докажите, что после применения любого конечного числа таких операций не может оказаться, что каждый многочлен на доске имеет 37 различных положительных корней.

6. Натуральные числа a, b, c, d, e, f таковы, что число $S=a+b+c+d+e+f$ делит числа $abc+def$ и $ab+bc+ca-de-ef-df$. Докажите, что S составное.

7. Существуют ли такие ненулевые числа a, b, c, что при любом $n>3$ можно найти многочлен вида $P_n(x)=x^n+\ldots+ax^2+bx+c$, имеющий ровно n (не обязательно различных) целых корней?