Многочлены

Определение: *Многочленом степени n* называется выражение вида

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

где $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ — произвольные действительные (или комплексные) числа, при этом $a_n \neq 0$. Они называются коэффициентами многочлена. Степень многочлена $P(x)$ обозначается $degP(x)$.

1. Докажите, что если $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, то для любых неравных целых чисел a и b верно, что $P(a) - P(b) \vdots a - b$.

Определение: Поделить с остатком многочлен $P(x)$ на многочлен $Q(x)$, не равный тождественно нулю, — значит представить его в виде

$$P(x) = Q(x)T(x) + R(x),$$

где $T(x)$ и $R(x)$ — некоторые многочлены и $degR(x) < degQ(x)$. При этом, если многочлен $R(x)$ совпадает с нулём, то говорят, что $P(x) \vdots Q(x)$.

2. Поделите с остатком: **(а)** $2x^3 - 3x^2 + 4x^2 - 5x + 6$ на $x^2 - 3x + 1$; **(б)** $x^3 - 3x^2 - x - 1$ на $3x^2 - 2x + 1$; **(в)** $2x^2 + x + 2$ на $x^2 + x + 1$.

3. Докажите, что в определении выше $T(x)$ и $R(x)$ определяются однозначно.

4. **(а)** **(Теорема Безу.)** Докажите, что остаток от деления многочлена $P(x)$ на $x - a$ равен $P(a)$.

   (б) Докажите, что $P(x) \vdots (x - a) \iff P(a) = 0$.

   (в) Докажите, что многочлен степени n имеет не более n корней.

   (г) Докажите, что многочлен степени $n > 1$ принимает каждое своё значение не более n раз.

5. Докажите, что многочлен степени n однозначно задаётся своими значениями в $n+1$ точке. То есть, если многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ степени n принимают одинаковые значения в $n+1$ точке, то они тождественно равны.

6. Докажите, что можно выбрать такие различные действительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$, что уравнение

$$(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_{10}) = (x + a_1)(x + a_2)\ldots(x + a_{10})$$

   будет иметь ровно 5 различных действительных корней.

7. **(Интреполяционный многочлен Лагранжа.)** Придумайте многочлен степени n (необязательно записывать его в стандартном виде), в точках $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ принимающий значения $b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}$ соответственно, т.е. заданный своими значениями в $n+1$ точке.