Теорема Менелая

1. В неравнобедренном треугольнике ABC провели биссектрисы его внешних углов, которые пересекают прямые BC, CA, AB соответственно в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.

2. ***(Теорема Гаусса.)*** Если прямая, не проходящая через вершины треугольника ABC, пересекает его стороны BC, CA, AB соответственно в точках A_1, B_1, C_1, то середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1 лежат на одной прямой.

3. Точки A_1, B_1, C_1 расположены соответственно на сторонах BC, CA, AB треугольника ABC. Прямые AB и A_1B_1 пересекаются в точке C_2, прямые BC и B_1C_1 — в точке A_2, а прямые AC и A_1C_1 — в точке B_2. Докажите, что если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, то A_2, B_2 и C_2 лежат на одной прямой.

4. Пусть BD — биссектриса треугольника ABC. Точки I_a, I_c — центры вписанных окружностей треугольников ABD, CBD. Прямая I_aI_c пересекает прямую AC в точке Q. Докажите, что $\angle DBQ = 90°$.

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки E и F — середины сторон AD и BC соответственно. Отрезки CE и DF пересекаются в точке O. Докажите, что если прямые AO и BO делят сторону CD на три равные части, то $ABCD$ — параллелограмм.

6. Окружность, вписанная в треугольник ABC, имеет центр O и касается стороны AC в точке K. Вторая окружность — также с центром O, пересекает все стороны треугольника ABC. Пусть E и F — соответственно ее точки пересечения со сторонами AB и BC, ближайшие к вершине B; B_1 и B_2 — точки ее пересечения со стороной AC, причем B_1 — ближе к A. Докажите, что точки B, K и точка P пересечения отрезков B_2E и B_1F лежат на одной прямой.

7. На продолжении стороны BC треугольника ABC за точку B отмечена точка D таким образом, что $BD = BA$. Точка M — середина стороны AC. Биссектриса $\angle ABC$ пересекает прямую DM в точке P. Докажите, что $\angle BAP = \angle ACB$.