

Теорема Чевы

1. В треугольнике ABC на сторонах AB , BC , CA отметили соответственно точки F , D , E так, что отрезки AD , BE , CF пересекаются в одной точке. Известно, что DE — биссектриса угла ADC . Докажите, что DF — биссектриса угла ADB .
2. На катетах AB и AC прямоугольного треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты $ADEB$ и $AFGC$. Докажите, что прямые BG и CE пересекаются на перпендикуляре, проведённом из вершины A на BC .
3. (а) Вписанная (б) Вневписанные окружности треугольника ABC касаются его сторон BC , CA , AB в точках A_1 , B_1 , C_1 соответственно. Докажите, что прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке.
4. Прямые AP , BP , CP пересекают стороны BC , CA , AB треугольника ABC соответственно в точках A_1 , B_1 , C_1 . Около треугольника $A_1B_1C_1$ описана окружность, пересекающая вторично прямые BC , CA , AB в точках A_2 , B_2 , C_2 . Докажите, что прямые AA_2 , BB_2 , CC_2 пересекаются в одной точке.
5. AA_1 и CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC . B_0 — середина стороны AC . Прямая, проходящая через вершину B параллельно AC , пересекает прямые B_0A_1 и B_0C_1 в точках A' и C' соответственно. Докажите, что прямые AA' и CC' пересекаются на высоте треугольника ABC .
6. Пусть P — произвольная точка на высоте AA_1 остроугольного треугольника ABC . Прямые BP и CP пересекают стороны AC и AB в точках B_1 и C_1 соответственно. Доказать, что $\angle B_1A_1P = \angle C_1A_1P$.
7. AA_1 , BB_1 , CC_1 — медианы треугольника ABC . AA_3 , BB_3 , CC_3 — высоты, A_2 , B_2 , C_2 — середины соответствующих высот. Докажите, что прямые A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 пересекаются в одной точке.
8. В треугольник ABC вписана окружность с центром I , касающаяся сторон AC и AB в точках E и F соответственно. Точки X и Y на прямой EF выбраны так, что $CX = CE$ и $BX = BF$. Прямые BX и CY пересекаются в точке T . Докажите, что прямая TI делит отрезок XY пополам.