

Поворотная гомотетия

Ключевая лемма на подумать. Некоторая поворотная гомотетия переводит отрезок A_1B_1 в отрезок A_2B_2 . Где может находиться ее центр? Или же, как построить ее центр, если на плоскости заданы только лишь два отрезка? Подумайте про крайние случаи построения.

0. Окружности Γ_1 и Γ_2 пересекаются в точках P и Q . Общая касательная этих окружностей (проходящая ближе к точке P) касается Γ_1 и Γ_2 в точках A и B соответственно. Касательная к Γ_1 в точке P повторно пересекает Γ_2 в точке C . R — точка пересечения AP и BC . Докажите, что описанная окружность треугольника PQR касается прямых BP и BR .
1. На катетах прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C вовне построили квадраты $ACKL$ и $BCMN$. CE — высота треугольника. Докажите, что угол LEM прямой.
2. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ повернули относительно их середин на 90° против часовой стрелки, получились отрезки A_0B_0 и C_0D_0 . Докажите, что $B_0C_0 = A_0D_0$.
3. Окружности ω и Ω пересекаются в точках A и B . Точки M и N выбраны на окружностях таким образом, что AM касается ω , AN касается Ω . Треугольник MAN достроен до параллелограмма $MANC$. Докажите, что $\angle APQ = \angle ANC$, где P и Q — середины отрезков BN и MC соответственно.
4. Внеписанная окружность с центром I_B , противолежащая вершине B треугольника ABC , касается продолжений сторон BA и BC в точках U и V соответственно. I_C — центр внеписанной окружности напротив вершины C . Пусть P — произвольная точка на прямой BC ; прямая PI_C пересекает прямую UV в точке Q . Докажите, что $CQ \perp PI_B$.
5. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$). X — середина меньшей дуги AB окружности ABC , Y — середина стороны AC . Окружность с центром в O , описанная около AXY , вторично пересекает AB в точке K . Докажите, что прямые XO и KY пересекаются на биссектрисе угла ABC .