

Устная олимпиада

1. Натуральное число k назовём неудобным, если каждое из чисел $k - 1$, k , $k + 1$ не является точным квадратом. Докажите, что для любого нечётного натурального n число

$$9n^3 + 8n^2 + 7n + 6$$

является неудобным.

2. M — середина стороны AD квадрата $ABCD$. Биссектрисы углов AMC и DMC пересекают стороны AB и CD в точках N и K соответственно. Докажите, что KM — биссектриса угла NKD .
3. Есть 7 кучек по 200 камней. Два игрока ходят по очереди. За один ход можно взять из какой-нибудь кучки количество камней, равное простому числу. Игра заканчивается тогда, когда нельзя сделать ход. Первый выигрывает, если хотя бы в одной кучке по окончании игры нет камней. Второй выигрывает, если по окончании игры во всех кучках по 1 камню. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?
4. Существует ли натуральное число, которое, будучи записанным дважды подряд (в десятичной записи), даст точный квадрат?
5. По кругу написаны числа $0, 1, 2, \dots, 11$ (в указанном порядке). Разрешается взять число, заменить его на 0 , а к его соседям прибавить по половине этого числа. Можно ли сделать равными 11 из 12 чисел?
6. $x, y, z > 0$ и $x + y + z = 3$. Докажите неравенство

$$\frac{x+y}{xy(4-xy)} + \frac{y+z}{yz(4-yz)} + \frac{z+x}{zx(4-zx)} \geq 2.$$