

Оценки и примеры в задачах про клеточки

1. Вася взял клетчатый прямоугольник, в котором 999 строк и 1000 столбцов, разбил его на полосы 1×4 (вертикальные или горизонтальные) и окрасил каждую полосу в свой цвет. Для каждой из 999 строк он посчитал, сколько цветов встречается в этой строке. Для каждой строки, кроме какой-то одной, у него получилось 400 цветов. Сколько цветов могло получиться в оставшейся строке?
2. Клетчатый квадрат 100×100 разбит на единичные квадратики. В каждом из квадратиков, расположенных на диагонали, идущей из левого верхнего угла в правый нижний, провели диагональ: в верхних 50 вдоль диагонали большого квадрата, а в нижних — перпендикулярно ей. Затем в остальных квадратиках произвольным образом провели по одной диагонали. Какое наибольшее количество параллелограммов, составленных из двух половин соседних квадратиков, заведомо можно найти на получившейся картинке?
3. Какое наименьшее количество клеток надо отметить на доске 8×8 , чтобы среди любых пяти клеток, идущих подряд по вертикали, горизонтали или диагонали, была хотя бы одна отмеченная?
4. Все клетки доски 50×50 — белые. Разрешается перекрашивать в зелёный цвет любые три белых клетки, стоящие подряд по диагонали. Какое наибольшее количество клеток можно сделать зелёными?
5. Поле представляет собой клетчатый квадрат 41×41 , в одной из клеток которого замаскирован танк. Истребитель за один выстрел обстреливает одну клетку. Если произошло попадание, танк переползает на соседнюю по стороне клетку поля, если нет — остаётся на месте. При этом после выстрела пилот истребителя не знает, произошло ли попадание. Для уничтожения танка надо попасть в него два раза. Каким наименьшим числом выстрелов можно обойтись для того, чтобы гарантировать, что танк уничтожен?
6. У Пети есть клетчатый с двух сторон лист бумаги, клетки которого образуют квадрат 300×300 . Каждую из его сторон он разбил на прямоугольники со стороной 1, причём с одной стороны эти прямоугольники расположены горизонтально, а с другой — вертикально. После этого он покрасил каждый из прямоугольников в какой-то цвет. Получилось так, что на одной стороне нет двух прямоугольников, окрашенных в один цвет, а также каждая клетка была покрашена с двух сторон в разные цвета. Какое наименьшее число цветов могло быть использовано?
7. Шахматный конь обошел доску 8×8 , побывав на каждой клетке по одному разу. Клетки пронумеровали вдоль маршрута коня числами от 1 до 64. После этого на клетку 1 пришла собака, и стала искать коня по следующему правилу. Оказавшись на клетке с номером n , она обнюхивает соседние по стороне клетки и находит среди них клетку с наибольшим номером. Собака переходит на эту клетку, если ее номер больше n , и остается на месте, если номер меньше n . Известно, что собака нашла коня, то есть пришла на 64-ю клетку. Докажите, что она переходила с одной клетки на другую не более 19 раз.
8. В белой таблице 2023×2023 некоторые клетки окрасили чёрным. Назовём натуральное число k удачным, если $k \leq 2016$, и в каждом из клетчатых квадратов со стороной k , рас-

положенных в таблице, окрашено ровно k клеток. (Например, если все клетки чёрные, то удачным является только число 1.) Какое наибольшее количество чисел могут быть удачными?

9. Расставим в клетках квадрата 100×100 различные натуральные числа. Рассмотрим всевозможные клетчатые квадраты, которые можно выделить в этом квадрате, и подсчитаем сумму чисел в каждом квадрате. Для какого наибольшего k среди подсчитанных сумм может найтись k равных чисел?