

Степень точки

1. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O , равны между собой углы BAC и CBD , а также углы BCA и CDB . Докажите, что касательные, проведённые из точек B и C к описанной окружности треугольника AOD , равны.
2. На продолжении хорды KL окружности с центром O взята точка A и из неё проведены касательные AP и AQ ; M — середина отрезка PQ . Докажите, что $\angle MKO = \angle MLO$.
3. BD — биссектриса угла B треугольника ABC . Описанная окружность треугольника BDC пересекает отрезок AB в точке E , описанная окружность треугольника ABD пересекает отрезок BC в точке F . Докажите, что $AE = CF$.
4. Через центр I вписанной в треугольник ABC окружности проведена прямая, перпендикулярная прямой AI и пересекающая прямую BC в точке M . Из точки I на прямую AM опущен перпендикуляр ID . Докажите, что точка D лежит на описанной окружности треугольника ABC .
5. На плоскости даны окружность ω , точка A , лежащая внутри ω , и точка B ($B \neq A$). Рассматриваются всевозможные треугольники BXY такие, что точки X и Y лежат на ω и хорда XY проходит через точку A . Докажите, что центры окружностей, описанных около треугольников BXY , лежат на одной прямой.
6. Точка M — середина стороны AC треугольника ABC . Окружность ω проходит через точку B , касается прямой AC в точке M и пересекает сторону AB в точке D , а сторону BC — в точке E . Пусть X и Y — середины отрезков AE и CD соответственно. Докажите, что окружность, описанная около треугольника MXY , касается ω .
7. Окружность ω касается сторон угла BAC в точках B и C . Прямая l пересекает отрезки AB и AC в точках K и L соответственно. Окружность ω пересекает l в точках P и Q . Точки S и T выбраны на отрезке BC так, что $KS \parallel AC$ и $LT \parallel AB$. Докажите, что точки P , Q , S и T лежат на одной окружности.
8. Пусть K — середина медианы AM треугольника ABC . Точки X и Y лежат на сторонах AB и AC соответственно так, что $\angle KXM = \angle ACB$, $\angle KYM = \angle ABC$, $AX > BX$, $AY > CY$. Докажите, что точки B , C , X , Y лежат на одной окружности.