

## Теорема Менелая

1. В неравностороннем треугольнике  $ABC$  провели биссектрисы его внешних углов, которые пересекают прямые  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  соответственно в точках  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ . Докажите, что точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  лежат на одной прямой.
2. (**Теорема Гаусса.**) Если прямая, не проходящая через вершины треугольника  $ABC$ , пересекает его стороны  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  соответственно в точках  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ , то середины отрезков  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  лежат на одной прямой.
3. Точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  расположены соответственно на сторонах  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  треугольника  $ABC$ . Прямые  $AB$  и  $A_1B_1$  пересекаются в точке  $C_2$ , прямые  $BC$  и  $B_1C_1$  — в точке  $A_2$ , а прямые  $AC$  и  $A_1C_1$  — в точке  $B_2$ . Докажите, что если прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке, то  $A_2$ ,  $B_2$  и  $C_2$  лежат на одной прямой.
4. Пусть  $BD$  — биссектриса треугольника  $ABC$ . Точки  $I_a$ ,  $I_c$  — центры вписанных окружностей треугольников  $ABD$ ,  $CBD$ . Прямая  $I_aI_c$  пересекает прямую  $AC$  в точке  $Q$ . Докажите, что  $\angle DBQ = 90^\circ$ .
5. В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  точки  $E$  и  $F$  — середины сторон  $AD$  и  $BC$  соответственно. Отрезки  $CE$  и  $DF$  пересекаются в точке  $O$ . Докажите, что если прямые  $AO$  и  $BO$  делят сторону  $CD$  на три равные части, то  $ABCD$  — параллелограмм.
6. Окружность, вписанная в треугольник  $ABC$ , имеет центр  $O$  и касается стороны  $AC$  в точке  $K$ . Вторая окружность — также с центром  $O$ , пересекает все стороны треугольника  $ABC$ . Пусть  $E$  и  $F$  — соответственно ее точки пересечения со сторонами  $AB$  и  $BC$ , ближайšie к вершине  $B$ ;  $B_1$  и  $B_2$  — точки ее пересечения со стороной  $AC$ , причем  $B_1$  — ближе к  $A$ . Докажите, что точки  $B$ ,  $K$  и точка  $P$  пересечения отрезков  $B_2E$  и  $B_1F$  лежат на одной прямой.
7. На продолжении стороны  $BC$  треугольника  $ABC$  за точку  $B$  отмечена точка  $D$  таким образом, что  $BD = BA$ . Точка  $M$  — середина стороны  $AC$ . Биссектриса  $\angle ABC$  пересекает прямую  $DM$  в точке  $P$ . Докажите, что  $\angle BAP = \angle ACB$ .