

Теория чисел

1. У каждого из десяти последовательных тридцатизначных чисел выписали на доску его наибольший делитель, меньший самого этого числа. Докажите, что среди выписанных чисел есть два, оканчивающихся одной и той же цифрой.
2. Дано нечётное натуральное число n . Назовём его натуральным делителем d интересным, если $d + 2$ – также делитель числа n . Докажите, что среди натуральных делителей числа n не более половины интересных.
3. Натуральные числа a и b больше 1. Известно, что $a^2 + b$ и $b^2 + a$ простые. Докажите, что числа $ab + 1$ и $a + b$ взаимно простые.
4. Какая цифра чаще всего встречается в числе $\underbrace{11 \dots 11}_{22222222} \cdot 4^{555555}$?
5. Для последовательности a_1, a_2, \dots целых чисел верно, что $a_m + a_n$ делится на $m + n$ для любых m и n . Докажите, что a_n кратно n для всех n .
6. У каждого натурального числа от $n + 1$ до $n + 1000$ выписывают все делители, не превосходящие 1000. (а) Докажите, что для бесконечно многих n сумма всех выписанных чисел будет меньше миллиона. (б) Докажите, что для бесконечно многих n сумма всех выписанных чисел будет больше миллиона.
7. Для натурального k определим последовательность a_1, a_2, \dots условиями $a_1 = k + 1$ и $a_{n+1} = a_1 a_2 \dots a_n + k$ при всех натуральных n . При каких k в этой последовательности бесконечно много точных квадратов?