

Какие-то неравенства

1. Докажите неравенство $\sqrt{a+1} + \sqrt{2a-3} + \sqrt{50-3a} \leq 12$.
2. Про положительные x, y, z известно, что $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$. Докажите, что $xyz \leq \frac{1}{8}$.
3. вещественные числа x и y принадлежат отрезку $[0, 1]$. Докажите неравенство

$$\frac{x}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+x^2}} \leq \sqrt{2}.$$

4. Докажите, что для любых положительных чисел x, y и z верно неравенство:

$$\sqrt[2]{x + \sqrt[3]{y + \sqrt[4]{z}}} > \sqrt[32]{xyz}.$$

5. Положительные числа x, y, z удовлетворяют соотношению $xy + yz + zx = 1$. Докажите, что

$$\sqrt{x + \frac{1}{x}} + \sqrt{y + \frac{1}{y}} + \sqrt{z + \frac{1}{z}} \geq 2 \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}).$$

6. Пусть $0 \leq a, b, c \leq 1$. Докажите неравенство

$$(a + b + c + 4) \left(\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \right) \leq 15.$$

7. Положительные числа x, y, z таковы, что $x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. Докажите, что

$$x + y + z \geq \sqrt{\frac{xy+1}{2}} + \sqrt{\frac{yz+1}{2}} + \sqrt{\frac{zx+1}{2}}.$$