

Метод Штурма

1. а) Докажите для неотрицательных чисел **неравенство между средним квадратическим и средним арифметическим**:

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

- б) Докажите для положительных чисел **неравенство между средним геометрическим и средним гармоническим**:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}.$$

2. Найдите наибольшее значение выражения $\sqrt{1+5x} + \sqrt{1+5y} + \sqrt{1+5z}$, если сумма положительных чисел x, y, z равна 1.
3. Докажите, что если сумма положительных чисел a_1, a_2, \dots, a_n равна 1, то

а) $\left(1 + \frac{1}{a_1}\right)\left(1 + \frac{1}{a_2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{a_n}\right) \geq (n+1)^n$;

б) $\left(1 + \frac{1}{a_1}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{a_2}\right)^2 + \dots + \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^2 \geq n(n+1)^2$.

4. а) $0 < a_1, a_2, \dots, a_n < 1$. Докажите, что

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \dots + \frac{1}{1+a_n} \leq \frac{n}{1 + \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}}.$$

- б) Докажите, что при $a_1, a_2, \dots, a_n > 1$ выполняется неравенство с противоположным знаком.

5. Докажите, что если сумма положительных чисел a_1, a_2, \dots, a_n равна 1, то

$$(1+a_1)(2+a_2) \dots (n+a_n) \leq 2n!.$$

6. Неотрицательные числа x_1, x_2, \dots, x_n таковы, что $x_1 + \dots + x_n = \frac{1}{2}$. Докажите, что

$$\frac{1-x_1}{1+x_1} \cdot \frac{1-x_2}{1+x_2} \cdot \dots \cdot \frac{1-x_n}{1+x_n} \geq \frac{1}{3}.$$

7. Для неотрицательных a, b, c верно, что $a + b + c = 3$. Докажите, что

$$a^2 b + b^2 c + c^2 a \leq 4$$