

Найти вписанный четырёхугольник

1. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1 . Из точек A_1 и C_1 опустили перпендикуляры на прямые AB и BC . Докажите, что прямая, проходящая через основания этих перпендикуляров параллельна стороне AC .
2. В прямоугольной трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH . На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны. Докажите, что прямые BH и ED параллельны.
3. Докажите, что если в выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ имеют место равенства $\angle ABC = \angle ADE$ и $\angle AEC = \angle ADB$, то $\angle BAC = \angle DAE$.
4. В равнобедренном треугольнике ABC ($AC = BC$) точка O – центр описанной окружности, точка I – центр вписанной окружности, а точка D на стороне BC такова, что прямые OD и BI перпендикулярны. Докажите, что прямые ID и AC параллельны.
5. Дан остроугольный треугольник ABC . На продолжениях его высот BB_1 и CC_1 за точки B_1 и C_1 выбраны соответственно точки P и Q такие, что угол PAQ прямой. Пусть AF — высота треугольника APQ . Докажите, что $\angle BFC = 90^\circ$.
6. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с диаметром AC . Точки K и M — проекции вершин A и C соответственно на прямую BD . Через точку K проведена прямая, параллельная BC и пересекающая AC в точке P . Докажите, что угол KPM — прямой.
7. На стороне AC остроугольного треугольника ABC отметили середину M . Точка K на описанной окружности треугольника ABC такова, что $\angle APK = 90^\circ$. Прямая BK пересекает сторону AC в точке X . Высота, проведённая из точки A к стороне BC , пересекает отрезок BM в точке Y . Докажите, что $XY \parallel AB$.
8. Окружность ω описана около остроугольного треугольника ABC . На стороне AB выбрана точка D , а на стороне BC — точка E так, что $DE \parallel AC$. Точки P и Q на меньшей дуге AC окружности ω таковы, что $DP \parallel EQ$. Лучи QA и PC пересекают прямую DE в точках X и Y соответственно. Докажите, что $\angle XBY + \angle PBQ = 180^\circ$.
9. На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ выбраны точки A_1 и C_1 соответственно. Отрезки AC_1 и CA_1 пересекаются в точке P . Описанные окружности треугольников AA_1P и CC_1P вторично пересекаются в точке Q , лежащей внутри треугольника ACD . Докажите, что $\angle PDA = \angle QBA$.