Теорема Чевы

1. Вневписанные окружности треугольника ABC касаются его сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

2. В треугольнике ABC на сторонах AB, BC, CA отметили соответственно точки F, D, E так, что отрезки AD, BE, CF пересекаются в одной точке. Известно, что DE — биссектриса угла ADC. Докажите, что DF — биссектриса угла ADB.

3. На катетах AB и AC прямоугольного треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты $ADEB$ и $AFGC$. Докажите, что прямые BG и CE пересекаются на перпендикуляре, проведённом из вершины A на BC.

4. Прямые AP, BP, CP пересекают стороны BC, CA, AB треугольника ABC соответственно в точках A_1, B_1, C_1. Около треугольника $A_1B_1C_1$ описана окружность, пересекающая вторично прямые BC, CA, AB в точках A_2, B_2, C_2. Докажите, что прямые AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в одной точке.

5. AA_1 и CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC. B_0 — середина стороны AC. Прямая, проходящая через вершину В параллельно AC, пересекает прямые B_0A_1 и B_0C_1 в точках A' и C' соответственно. Докажите, что прямые AA' и CC' пересекаются на высоте треугольника ABC.

6. Пусть P — произвольная точка на высоте AA_1 остроугольного треугольника ABC. Прямые BP и CP пересекают стороны AC и AB в точках B_1 и C_1 соответственно. Доказать, что $\angle B_1A_1P = \angle C_1A_1P$.

7. AA_1, BB_1, CC_1 — медианы треугольника ABC. AA_3, BB_3, CC_3 — высоты, A_2, B_2, C_2 — середины соответствующих высот. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке.

8. В треугольник ABC вписана окружность с центром I, касающаяся сторон AC и AB в точках E и F соответственно. Точки X и Y на прямой EF выбраны так, что $CX = CE$ и $BY = BF$. Прямые BX и CY пересекаются в точке T. Докажите, что прямая TI делит отрезок XY пополам.