

## Соответствия

1. В клетках таблицы  $6 \times 8$  расставляют числа от 1 до 48. Каких расстановок больше: в которых ровно 7 простых чисел оказалось в крайних клетках таблицы или в которых ровно 8 простых чисел там оказалось?
2. Докажите, что число способов разрезать прямоугольник на (а) уголки из трёх клеток; (б) доминошки чётно.
3. Упорный Саша выписал все возможные наборы из 100 целых чисел от 2 до 2023. Настойчивый Дима посчитал сумму чисел в каждом наборе. Проходившая мимо Настя нашла остаток от деления каждой суммы на 3. Каких остатков у неё получилось больше: 0, 1 или 2?
4. Прямоугольник  $1 \times n$  разбирают на фигурки трёх типов: синие квадратики  $1 \times 1$ , зелёные квадратики  $1 \times 1$  и оранжевые доминошки  $1 \times 2$ . (Например, при  $n = 2$  существует 5 способов разбить прямоугольник  $1 \times 2$ : СС, СЗ, ЗС, ЗЗ и ОО.) Обозначим через  $T_n$  количество способов так разбить прямоугольник  $1 \times n$ . Докажите, что  $T_{2n+1}$  делится на  $T_n$  при любом  $n \in \mathbb{N}$ .
5. Дана шахматная доска. Ее вертикали перенумерованы числами от 1 до 8, а горизонтали обозначены латинскими буквами от  $a$  до  $h$ . Рассматриваются покрытия доски доминошками. Каких разбиений больше — тех, которые содержат доминошку  $a1 - a2$ , или тех, которые содержат доминошку  $b2 - b3$ ?
6. Дня рисует пейзаж «Река»: картина  $8 \times 8$  пикселей, каждый пиксель одного из двух цветов: синий или оранжевый. Пейзаж удачный, если на картине есть подобие «реки»: последовательность граничащих друг с другом по стороне синих клеток, среди которых есть клетка в самом левом и в самом правом столбце. Докажите, что среди всевозможных  $2^{64}$  пейзажей удачных меньше половины.
7. Является ли чётным число всех 20-значных натуральных чисел, не содержащих в записи нулей и делящихся на 101?
8. Докажите, что количество способов представить натуральное число  $n$  в виде суммы нескольких идущих подряд натуральных чисел равно количеству нечётных делителей  $n$ .
9. В выпуклом 2023-угольнике провели все диагонали, причём никакие три из них не пересекаются в одной точке. Сколько треугольников можно найти на полученном рисунке?