

Соответствия

1. В клетках таблицы 6×8 расставляют числа от 1 до 48. Каких расстановок больше: в которых ровно 7 простых чисел оказалось в крайних клетках таблицы или в которых ровно 8 простых чисел там оказалось?
2. Докажите, что число способов разрезать прямоугольник на (а) уголки из трёх клеток; (б) доминошки чётно.
3. Упорный Саша выписал все возможные наборы из 100 целых чисел от 2 до 2023. Настойчивый Дима посчитал сумму чисел в каждом наборе. Проходившая мимо Настя нашла остаток от деления каждой суммы на 3. Каких остатков у неё получилось больше: 0, 1 или 2?
4. Прямоугольник $1 \times n$ разбирают на фигурки трёх типов: синие квадратики 1×1 , зелёные квадратики 1×1 и оранжевые доминошки 1×2 . (Например, при $n = 2$ существует 5 способов разбить прямоугольник 1×2 : СС, СЗ, ЗС, ЗЗ и ОО.) Обозначим через T_n количество способов так разбить прямоугольник $1 \times n$. Докажите, что T_{2n+1} делится на T_n при любом $n \in \mathbb{N}$.
5. Дана шахматная доска. Ее вертикали перенумерованы числами от 1 до 8, а горизонтали обозначены латинскими буквами от a до h . Рассматриваются покрытия доски доминошками. Каких разбиений больше — тех, которые содержат доминошку $a1 - a2$, или тех, которые содержат доминошку $b2 - b3$?
6. Даня рисует пейзаж «Река»: картина 8×8 пикселей, каждый пиксель одного из двух цветов: синий или оранжевый. Пейзаж удачный, если на картине есть подобие «реки»: последовательность граничащих друг с другом по стороне синих клеток, среди которых есть клетка в самом левом и в самом правом столбце. Докажите, что среди всевозможных 2^{64} пейзажей удачных меньше половины.
7. Является ли чётным число всех 20-значных натуральных чисел, не содержащих в записи нулей и делящихся на 101?
8. Докажите, что количество способов представить натуральное число n в виде суммы нескольких идущих подряд натуральных чисел равно количеству нечётных делителей n .
9. В выпуклом 2023-угольнике провели все диагонали, причём никакие три из них не пересекаются в одной точке. Сколько треугольников можно найти на полученном рисунке?