Диагностическая работа

1. Про прямоугольник $ABCD$ известно, что в нём выполняются соотношения:

$$AB + BC + CD = 20 \text{ и } AE = 9,$$

где точка E — середина стороны BC. Найдите площадь $ABCD$.

Ответ. 19

Решение. Обозначим длину AB через a, BC через $2b$. Тогда $a + b = \frac{AB+BC+CD}{2} = 10$. Применяя теорему Пифагора к прямоугольному треугольнику ABE, получаем $a^2 + b^2 = AE^2 = 81$. Тогда $2ab = (a + b)^2 - (a^2 + b^2) = 19$. Также, $S_{ABCD} = a \cdot 2b = 19$.

2. На плоскости нарисовано несколько кружков (ни у каких двух кружков нет общих точек), некоторые из которых соединены отрезками. Докажите, что в этих кружках можно расставить целые числа так, чтобы два кружка были соединены отрезком тогда и только тогда, когда стоящие в них числа взаимно просты.

Решение. Парам не соединенных кружков сопоставим различные простые числа. В каждый кружок запишем произведение всех чисел, соответствующих парам, в которых этот кружок участвует. Тогда если два кружка не соединены, то у записанных в них чисел есть общий делитель — число, сопоставленное их паре. Каждый простой делитель записанного в кружке числа не встречается ни в одном соединенном с рассматриваемым кружке, следовательно любые два числа из соединенных кружков взаимно просты.

3. p и q — простые числа такие, что $p^2+3pq+q^2$ — квадрат целого числа. Найдите наибольшее возможное значение $p + q$.

Ответ. 10

Решение 1. По условию $p^2 + 3pq + q^2 = a^2$ для некоторого целого a. Тогда $pq = a^2 - (p+q)^2 = (a - p - q)(a + p + q)$. В силу того, что $a > p + q$, можем заключить, что $a - p - q$ равняется одному из чисел $1, p, q, pq$. Если $a = 2p + q$, то $a^2 = 4p^2 + q^2 + 4pq > p^2 + 3pq + q^2 = a^2$. Если $a = p + 2q$, то $a^2 = p^2 + 4q^2 + 4pq > p^2 + 3pq + q^2 = a^2$. Если $a = pq + p + q$, то $a^2 = p^2 + q^2 + 2pq + p^2q^2 + 2p^2q + 2q^2p > p^2 + 3pq + q^2 = a^2$. Тогда $p^2 + 3pq + q^2 = (p + q + 1)^2$, откуда $pq = 2q + 2p + 1$. Без ограничения общности $q < p$. Если $q = 2$, то $2p = 2p + 5$, что неверно. Если же $q \geqslant 5$, то $2p + 2q + 1 = 5p > 2p + 2q + 1$, что так же неверно. Поэтому $q = 3$, и из $3p = 2p + 7$ получаем, что $p = 7$. Это единственная пара, удовлетворяющая условию, поэтому ответ $3 + 7 = 10$.

Решение 2. По условию $p^2 + 3pq + q^2 = a^2$ для некоторого целого a. Пусть $p \neq 3$, $q \neq 3$. Квадрат простого числа может давать остаток 0 или 1 по модулю 3, p и q простые, не делящиеся на 3. Значит, $p^2 + 3pq + q^2 \equiv 1 + 0 + 1 \equiv 2 \equiv a^2 \pmod 3$. Противоречие, следовательно $p = 3$ (без ограничения общности, так как если поменять p и q местами, это не отразится ни на сумме, ни на условии). $9 + 9q + q^2 = a^2$, следовательно $3q = a^2 - (q+3)^2 = (a-q-3)(a+q+3)$. $a - q - 3 < a + q + 3$ при натуральном q; $q = 2$ и $q = 3$ не подходят, поэтому $a - q - 3$ равняется 1 или 3. Во втором случае $a + q + 3 = q$ — противоречие. В первом случае $a = q + 4$, $a + q + 3 = 2q + 7 = 3q$, $q = 7$ — решение. Итак, $(3, 7)$ — единственное решение, поэтому ответ $3 + 7 = 10$.

4. Двое играют в игру на изначально черной доске 16×16. Первый в свой ход может перекрасить в белый любые k клеток. Второй — перекрасить любой столбец или строку в черный. Первый выигрывает, если в какой-то момент более половины клеток белые. При каком наименьшем k у первого есть выигрышная стратегия?

Ответ. 9

Решение. Приведём стратегию за первого при $k = 9$. Мысленно раскрасим доску в шахматную раскраску красным и синим цветами. Первый будет перекрашивать в белый любые 9 чёрных клеток, “красных” в шахматной раскраске. Если же таких клеток менее 9, покрасит все чёрные, “красные” в шахматной раскраске, и ещё 1 “синюю” и победит. При такой стратегии, второй за один ход может перекрасить в чёрный не более 8 клеток, потому что в любом ряду “красных” ровно 8, а “синие” не красятся в белый до конца игры. Тогда число белых клеток каждую пару ходов будет возрастать хотя бы на 1, и через не более, чем $\frac{16\cdot 16}{2} - 8$ пар ходов первый сможет победить своим ходом.

Оценка на 9. Пусть $k \leqslant 8$. Второй всегда перекрашивает строку, в которой наибольшее число белых клеток. Докажем, что тогда на доске никогда не будет более $16\cdot 7+8$ белых клеток. Пусть в какой-то момент после хода первого белых клеток от $16 \cdot 7 + 1$ до $16 \cdot 7 + 8$. По принципу Дирихле в строке с наибольшим числом белых хотя бы 8 белых клеток. Второй их закрашивает, и белых клеток остаётся не более $16 \cdot 7$. Поскольку $k \leqslant 8$, числу белых клеток нужно попасть в числовой отрезок $[16 \cdot 7 + 1, 16 \cdot 7 + 8]$, чтобы стать большим $16 \cdot 7 + 8$. Но как только оно попадает в указанный отрезок, второй своим ходом уменьшает его хотя бы на 8, поэтому оно никогда не превысит $16 \cdot 7 + 8 < \frac{16\cdot 16}{2}$, и первый не выиграет.

5. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Точки D и E лежат на лучах BI и CI соответственно, причём $AD \perp BI$ и $AE \perp CI$. Прямые AD и AE вторично пересекают описанные окружности треугольников CDI и BEI в точках M и N соответственно. Докажите, что прямая AI делит отрезок MN пополам.

Решение. Из вписанности четырёхугольника $CDIM$ следует, что $\angle MCI = \angle MDI = 90°$, тогда CM — биссектриса внешнего угла C треугольника ABC, поскольку $CI \perp CM$. Аналогично доказывается, что BN — биссектриса внешнего угла B треугольника ABC. Прямые CM, BN и AI пересекаются в центра вневписанной окружности треугольника ABC, которую мы обозначим через I_a. Обозначим через P вторую точку пересечения описанных окружностей треугольников CDI и BDI. $\angle MPI = 180° - \angle IDM = 90°$. Аналогично, $\angle NPI = 90°$. Таким образом, M, P и N лежат на одной прямой. Из вписанности $DIPM$ и $EBPI$ следует, что $\angle ICM = \angle IPN = 180 - \angle IEN$, откуда следует, что $I_aM||AN$. Аналогично, $I_aN||AM$. Получается, что $MANI_a$ — параллелограмм, то есть II_a (а значит и AI) делит MN пополам.

6. Для положительных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ таких, что $x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1} = x_1 x_2 \dots x_n$, докажите неравенство $(x_1 - n + 1)(x_2 - n + 1)\dots(x_n - n + 1) \geqslant 1$.

Решение. Применяя неравенство Коши, для любого i получим, что

$$x_1 x_2 \dots x_n = x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1} \geqslant x_i^{n-1} + (n-1)x_1 x_2 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_n.$$

После преобразований можем заключить, что

$$(x_i - n + 1) \geqslant \frac{x_i^{n-1}}{x_1 x_2 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_n} = \frac{x_i^n}{x_1 x_2 \dots x_n} > 0.$$

Перемножив неравенства для всех i, получим

$$(x_1 - n + 1)(x_2 - n + 1)\dots(x_n - n + 1) \geqslant \frac{x_1^n x_2^n \dots x_n^n}{(x_1 x_2 \dots x_n^n)^n} = 1.$$