Диагностическая работа - Решения

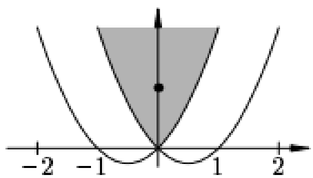
1. В больнице работают 88 врачей. Средняя зарплата врачей по больнице равна 100 грошей. Средняя зарплата тех врачей, которые получают меньше 100 грошей, равна 85 грошей. Средняя зарплата тех врачей, которые получают больше 100 грошей, равна 135 грошей. Какое наименьшее число врачей могут иметь зарплату ровно 100 грошей?

Ответ: 8.

Решение: Сначала докажем оценку. Пусть n_1 – количество врачей, получающих меньшее 100 грошей, а n_2 – количество врачей, получающих больше 100 грошей. Средняя зарплата всех врачей $\frac{85n_1+135n_2+100(88-n_1-n_2)}{88} = 100$. Упрощая, получим $3n_1 = 7n_2$. Из этого можно сделать вывод, что $n_1 = 7n$ и $n_2 = 3n$ для некоторого n. То есть количество врачей с зарплатой, не равной 100 грошей равно $10n$, что кратно 10. Тогда врачей с зарплатой, равной 100 грошей, не меньше 8.

Способ построения примера на 8 следует из оценки: для $n = 8$ достаточно взять $n_1 = 56$ врачей с зарплатой 85 грошей и $n_2 = 24$ врача с зарплатой 135 грошей и 8 врачей с зарплатой 100 грошей.

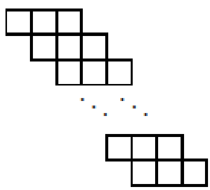
2. На рисунке изображены две параболы, старшие коэффициенты которых равны единице. Третья парабола имеет вершину в точке $(0, 1)$ и целиком лежит в закрашенной области (возможно, касается ее границы). Какое наименьшее значение может принимать ее старший коэффициент?



Ответ: $1,25$.

Решение: Из условия мы знаем корни и старшие коэффициенты нарисованных парабол, поэтому обозначим их следующим образом $f_1(x) = x^2 - x$, $f_2(x) = x^2 + x$, а третью $f(x) = ax^2 + 1$. Мы хотим найти минимальное a такое, что $f(x) \geqslant \max(f_1(x), f_2(x))$. Заметим, что условие $f(x) \geqslant f_1(x)$ является необходимым для этого. Если оно выполнено, то $\max(f_1(x), f_2(x)) = \max(f_1(x), f_1(-x)) \leqslant \max(f(x), f(-x)) = f(x)$, что говорит о его достаточности. При $a = 1$ справедливо неравенство $f(-2) < f_1(-2)$. При $a \neq 1$ условие $f(x) - f_1(x) = ax^2 + 1 - x^2 + x \geqslant 0$ равносильно тому, что $1^2 - 4(a-1) \leqslant 0$, ведь при $x = 0$ значение $f(x) - f_1(x)$ положительно. В таком случае $a \geqslant 1,25$.

3. У Александра есть фигура в форме «лесенки»: она состоит из 12 строк, в каждой из которой 3 клетки, и каждая следующая строчка сдвигается на одну клетку вправо от предыдущей. Александр хочет расставить в ней числа от 1 до 36 так, чтобы в каждой строчке числа возрастали слева направо, а в каждом столбце числа возрастали сверху вниз. Сколькими способами Александр сможет это сделать?



Ответ: 2048.

Решение: Рассмотрим диагонали, состоящие из клеток и идущие ”вправо вверх наискосок”.

11 из этих диагоналей пересекают "лесенку" по двум клеткам, а 14 – по одной. Рассмотрим расстановку, удовлетворяющую условию. Для двух чисел с разных диагоналей из условия можно заключить, что число, лежащее на верхней из двух диагоналей, должно быть меньше числа, лежащего на нижней диагонали (более того, это условие равносильно возрастанию по строкам и столбцам). Таким образом, для каждой диагонали можно однозначно определить числа, лежащие на ней, посчитав количество чисел, лежащих на диагоналях выше и ниже неё. Если на диагонали лежит одно число, то мы можем восстановить диагональ однозначно, если же два числа, то у нас есть два способа расставить два определённых ранее числа в клетки этой диагонали. Поскольку расстановки чисел в диагонали происходят независимо, то всего способов $2^{11} = 2048$.

4. В двух коробках лежат башмаки трех цветов: в левой коробке — 16 зелёных, 5 жёлтых и 5 чёрных (все — на левую ногу), в правой коробке — 14 зелёных, 7 жёлтых и 7 чёрных (все — на правую ногу). Жора может достать несколько башмаков из левой коробки и несколько (возможно, другое количество) из правой. Все башмаки нужно доставать одновременно и не глядя. Какое минимальное число башмаков ему надо вытащить, чтобы среди них обязательно нашлась пара башмаков одного цвета на левую и правую ногу?

Ответ: 21.

Решение: Сначала приведём пример на 21. Для этого возьмём 6 башмаков из левой коробки и 15 из правой. Заметим, что из правой коробки гарантированно будет взят хотя бы один зелёный башмак, поскольку жёлтых и чёрных суммарно 14. Поэтому можем считать, что из левой коробки были взяты башмаки только жёлтого и чёрного цветов (в противном случае, утверждении задачи верно). Тогда из левой коробки были взяты и жёлтые и чёрные башмаки, ибо 6 башмаков одного из этих цветов взять не получится. Также заметим, что из правой коробки был взят хотя бы один не зелёный башмак, а мы уже доказали, что к такому взята пара того же цвета из левой коробки.

Оценка на 20. Пусть из правой коробки взяли x башмаков, а из правой $20 - x$. Если $x \leqslant 7$, то могли достать x ($x \leqslant 7$) жёлтых из правой коробки и суммарно $20 - x$ ($20 - x < 16 + 5$) зелёных и чёрных из левой. Если $8 \leqslant x \leqslant 14$, то из правой коробки могли достать 7 жёлтых и $x - 7$ ($x - 7 \leqslant 7$) чёрных, а из левой $20 - x$ ($20 - x < 16$) зелёных. Если $20 \geqslant x \geqslant 15$, то из правой коробки могли достать 14 зелёных и $x - 14$ ($x - 14 < 7$) жёлтых, а из левой $20 - x$ ($20 - x \leqslant 5$) чёрных.

5. Василий расставил в клетки квадрата 11×11 положительные числа. Оказалось, что если перемножить все числа, стоящие в одном столбце или в одной строке, то получится 1, а если перемножить числа все числа в любом квадрате 3×3, то получится $\frac{1}{2}$. Что получится, если перемножить числа в первой и второй клетке третьей строки?

Ответ: 4096.

Решение: Нумерация столбцом будет вестись сверху вниз, а столбцов – слева направо. Обозначим искомое произведение через a. Произведение чисел в угловом квадрате 2×2, стоящем в верхнем левом углу обозначим через b. Рассмотрим произведение в трёх верхних строках. По условию данное произведение равно 1, а также оно равно $\frac{ab}{8}$, поскольку данное множество клеток разбивается на прямоугольник 2×3, произведение чисел в котором равно ab, и три квадрата 3×3. Поэтому $ab = 8$. Рассмотрим произведение чисел в первых двух строках и в угловом квадрате 9×9, стоящем в правом нижнем углу. По условию оно равно $\left(\frac{1}{2}\right)^9$. С другой стороны, эти же клетки разбиваются на 9 столбцов (с номерами от 3 до 11) и угловой квадрат 2×2, произведение в котором по определению равно b. Отсюда $b = \left(\frac{1}{2}\right)^9$. Отсюда $a = \frac{8}{b} = 2^{12} = 4096$.

6. Зинаида взяла три натуральных числа a, b, c таких, что они все больше 100 и взаимно просты в совокупности (то есть у этих трёх чисел нет общего делителя, кроме 1). Оказалось, что $a + b$ кратно c и $b + c$ кратно a. Чему равно минимальное возможное значение b?

Ответ: 10099.

Решение: По условию $a+b$ кратно c, а значит и $a+b+c$ кратно c. Аналогично $a+b+c$ кратно a. Тогда $a+b+c$ делится на НОК(a, c). Обозначим НОД(a, c) через d. Из написанного ранее следует, что $a+b+c$ и $a+c$ кратны d, тогда и b кратно d, но из взаимной простоты следует, что $d = 1$. Тогда $a+b+c$ кратно НОК$(a, c) = ac$, а значит $a+b+c \geqslant ac$. Отсюда $b \geqslant ac-a-c = (a-1)(c-1)-1 \geqslant (101-1)(102-1)-1 = 10099$, причем последнее неравенство верно в силу того, что a и c — различные числа, большие 100. Тройка $a = 101, b = 10099, c = 102$ подходит, $101 + 10099 = 10200$ кратно 102 и $10099 + 102 = 10100 + 101 = 10201$ кратно 101.

7. В треугольнике ABC на стороне AC отметили точку X так, что $\angle CBX = 23°$. На отрезке BX отметили точку Y так, что $\angle BCY = 90°$, $BY = 2CX$. Найдите величину угла C. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 111°.

Решение: Пусть M — середина BY. Тогда $MC = BM = MY$ (как медиана в прямоугольном треугольнике) и всё это ещё равно CX (по условию). Тогда $\angle BCM = \angle CBM = 23°$, значит $\angle CMX = 46°$, значит $\angle CXM = \angle CMX = 46°$, значит $\angle MCX = 180° - 46° - 46° = 88°$, значит $\angle ACB = \angle BCM + \angle MCX = 23° + 88° = 111°$.

8. На сторонах AC и BC треугольника ABC отметили точки X и Y соответственно так, что A, B, X, Y лежат на окружности ω. Оказалось, что центр описанной окружности треугольника XYC тоже лежит на ω. Пусть отрезки AY и BX пересекаются в точке P и известно, что $\angle ACB = 2\angle APX$. Найдите$\angle ACB$. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 72°.

Решение: Пусть центр описанной окружности треугольника XYC это O, а угол $\angle APX$ равен α. Тогда $\angle ACB = 2\alpha$ (по условию), $\angle XOY = 2\angle XCY = 4\alpha$ (как центральный угол), $\angle XAY = 180° - \angle XOY = 180° - 4\alpha$ ($XAYO$ — вписанный), $\angle BYA = \angle ACB + \angle CAY = 180° - 2\alpha$, (внешний угол), $\angle BXA = \angle BYA = 180° - 2\alpha$ ($AXYB$ — вписанный). Тогда по сумме углов треугольника ABC получаем, что $\alpha + 180° - 2\alpha + 180° - 4\alpha = 180°$, следовательно $\alpha = 36°$, и угол $\angle ACB = 72°$.

9. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Пусть AC и BD пересекаются в точке X. Известно, что $\angle ADB = 90°, BC = 3$, $CX = \frac{3}{4}$, а площадь треугольника ACD в три раза меньше площади треугольника ABC. Чему равно AX?

Ответ: 4, 25.

Решение: $\angle ACB = \angle ADB = 90°$ ($ABCD$ — вписанный), поэтому $BX^2 = BC^2 + CX^2 = 9 + \frac{9}{16}$, следовательно $BX = \frac{3\sqrt{17}}{4}$. Пусть DK — высота треугольника ADC. Так как $\angle ACB = 90°$, то $DK \parallel BC$. Так как $S_{ABC} = 3S_{ADC}$, то высота $DK = \frac{1}{3}BC$. Следовательно, треугольник DKX

подобен треугольнику BCX с коэффициентом $\frac{1}{3}$, значит $DX = \frac{\sqrt{17}}{4}$. Так как $AX \cdot CX = BX \cdot DX$, то получаем, что $AX = \frac{3 \cdot 17 \cdot 4}{16 \cdot 3} = 4,25$.

10. У Васи есть две корзины с яблоками. Вася взял одно яблоко из первой корзины и переложил во вторую. В результате средний вес яблок в каждой корзине увеличился на 3 г. На следующий день Вася взял ещё одно яблоко из первой корзины и переложил во вторую. В результате средний вес яблок в каждой корзине увеличился на 3%. Чем равен средний вес всех яблок Васи?

Ответ: 103.

Решение: Пусть a и b — соответственно средний вес в первой и второй корзине изначально, m и n — соответственно количество яблок в первой и второй корзине изначально.

Тогда суммарный вес изначально в первой и второй корзине равен am и bn соответственно, после первого переложенного яблока равен $(a+3)(m-1)$ и $(b+3)(n+1)$ соответственно, а после второго переложенного яблока равен $1,03(a+3)(m-2)$ и $1,03(b+3)(n+2)$. Тогда

$$am - (a+3)(m-1) = (b+3)(n+1) - bn,$$

$$(a+3)(m-1) - 1,03(a+3)(m-2) = 1,03(b+3)(n+2) - (b+3)(n+1).$$

(Так как обе части первого равенства равны весу первого переложенного яблока, а обе части второго равенства равны весу второго переложенного яблока.)

Раскрыв в обоих равенствах скобки и приведя подобные слагаемые получаем

$$a - b = 3(m+n),$$

$$0,03(am + bn) = 1,06(a-b) - 0,09(m+n).$$

Тогда

$$\frac{am+bn}{m+n} = \frac{106(a-b)}{3(m+n)} - 3 = 106 - 3 = 103,$$

а $\frac{am+bn}{m+n}$ и есть средний вес всех яблок, что и требовалось.