

Числа Каталана.

Последовательность из знаков «(» и «)» длины $2n$ называется *правильной*, если выполнены два условия:

- в ней поровну символов «(» и «)»;
- на любом префиксе этой последовательности символов «(» не меньше чем «)».

Количество всевозможных правильных скобочных последовательностей длины $2n$ обозначается символом C_n и называется n -ым *числом Каталана*.

1. Докажите, что числа Каталана определяются рекуррентным соотношением

$$C_0 = 1, C_{n+1} = C_0 C_n + C_1 C_{n-1} + \dots + C_n C_0$$

2. (а) Частица вылетает из точки $(0, 0)$ и за одну секунду проходит либо единицу расстояния вправо, либо единицу вверх. Докажите, что количество способов добраться до точки (n, n) , не поднимаясь строго выше прямой $y = x$, равно C_n .

(б) Докажите, что количество способов, которыми частица может добраться до точки (n, n) , поднявшись выше прямой $y = x$, совпадает с количеством способов, которыми частица может добраться до точки $(n - 1, n + 1)$.

(в) Выведите явную формулу числа Каталана из предыдущего пункта.

3. Докажите, что в каждом из этих множеств содержится C_n элементов:

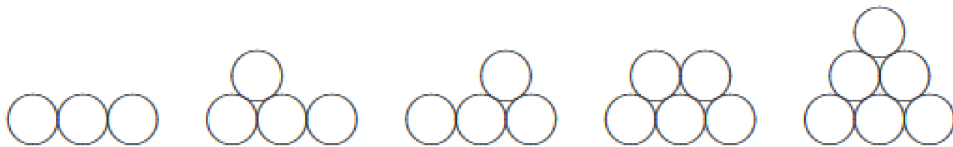
(а) способы соединить $2n$ точек на окружности n непересекающимися хордами;

(б) триангуляции $(n + 2)$ -угольника;

(в) неубывающие последовательности натуральных чисел a_1, \dots, a_n такие, что $a_i \leq i$;

(г) способы разбить лестницу ширины и высоты n на n прямоугольников;

(д) способы положить несколько монет на плоскости друг на друга так, чтобы в нижнем слое было n монет;



(е) последовательностей длины $n - 1$ из чисел ± 1 и ± 0 с неотрицательными частичными суммами и общей суммой чисел 0.

4. (а) Дана последовательность $a_1, a_2, \dots, a_{2n+1}$, состоящая из $n + 1$ «1» и n «-1». Докажите, что существует ровно один индекс i , для которого все суммы $a_i, a_i + a_{i+1}, \dots, a_i + \dots + a_k, \dots$ положительны. (Нумерация индексов идёт по модулю $2n + 1$.)

(б) Выведите явную формулу числа Каталана из предыдущего пункта.

5. Частица и античастица зарождаются в момент времени 0 в точке $(0, 0)$. Каждая из них за секунду проходит либо единицу расстояния вправо, либо единицу расстояния вверх. В момент времени n они впервые встретились и аннигилировали. Сколькими способами это могло произойти?