

Клеточки

1. Доску 123×123 разбили на прямоугольники 1×3 . Докажите, что число горизонтальных прямоугольников делится на 3.
2. Двое игроков по очереди расставляют в каждой из 24 клеток поверхности куба $2 \times 2 \times 2$ числа $1, 2, 3, \dots, 24$ (каждое число можно ставить один раз). Второй игрок хочет, чтобы суммы чисел в клетках каждого кольца из 8 клеток, опоясывающего куб, были одинаковыми. Сможет ли первый игрок ему помешать?
3. Из доски 300×300 вырезали несколько клеток, не граничащих ни по стороне, ни по углу. Вася посчитал все способы вырезать из оставшейся фигуры трёхклеточный уголок и насчитал 48000 способов. Докажите, что Вася ошибся.
4. Бесконечная клетчатая плоскость разбита на доминошки (клетчатые прямоугольники 1×2). Если любую горизонтальную доминошку разбиения переместить на 49 клеток вправо или влево, то тоже получится доминошка разбиения. Если любую вертикальную доминошку разбиения переместить на 49 клеток вверх или вниз, то тоже получится доминошка разбиения. Может ли такое быть?
5. В таблице $n \times m$ отметили k клеток. Для какого наименьшего k гарантированно можно выбрать 3 отмеченные клетки, центры которых образуют прямоугольный треугольник?
6. В каждой клетке таблицы $N \times N$ записано число. Назовём клетку C хорошей, если в какой-то из клеток, соседних с C по стороне, стоит число на 1 больше, чем в C , а в какой-то другой из клеток, соседних с C по стороне, стоит число на 3 больше, чем в C . Каково наибольшее возможное количество хороших клеток?
7. Из клетчатого бумажного квадрата 100×100 вырезали по границам клеток 1950 двуклеточных прямоугольников. Докажите, что из оставшейся части можно вырезать по границам клеток Т-тетраминошку — возможно, повёрнутую. (Если такая фигурка уже есть среди оставшихся частей, считается, что её получилось вырезать.)
8. Имеется квадрат клетчатой бумаги размером 102×102 клетки и связная фигура неизвестной формы, состоящая из 101 клетки. Какое наибольшее число таких фигур можно с гарантией вырезать из этого квадрата? Фигура, составленная из клеток, называется связной, если любые две ее клетки можно соединить цепочкой ее клеток, в которой любые две соседние клетки имеют общую сторону.