

Таблица как двудольный граф

1. Назовём конечное множество клеток на клетчатой плоскости *интересным*, если ладья, останавливаясь только на клетках этого множества, может попасть из любой его клетки в любую другую его клетку (при этом может перепрыгивать через неотмеченные клетки). Петя отметил на клетчатой плоскости некоторое интересное множество, после чего начал выбирать линию (вертикаль или горизонталь) и вычёркивать все клетки множества, лежащие на этой линии, и продолжал эту процедуру, пока клетки не кончились. Докажите, что он мог действовать таким образом, чтобы на протяжении всего процесса оставшееся множество оставалось интересным.
2. В таблице отмечено несколько клеточек. Докажите, что их можно покрасить в синий и красный цвета так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце разница между количеством синих и красных клеточек была бы не более 1.
3. Дано натуральное число $n > 2$. Рассмотрим все покраски клеток доски $n \times n$ в k цветов такие, что каждая клетка покрашена ровно в один цвет, и все k цветов встречаются. При каком наименьшем k в любой такой покраске найдутся четыре окрашенных в четыре разных цвета клетки, расположенные в пересечении двух строк и двух столбцов?