

Таблица как двудольный граф

1. В каждой строке и каждом столбце стоит по 2 фишки. Докажите, что можно снять часть фишек так, что в каждой строке и каждом столбце окажется по 1 фишке.
2. На доске 100×100 отмечены n клеток. Известно, что ладья, начав с любой из отмеченных клеток, может за несколько ходов оказаться в любой строке, а также в любом столбце. Какое наименьшее количество клеток может быть отмечено на доске?
3. На клетчатой доске 11×11 отмечено 22 клетки так, что на каждой вертикали и на каждой горизонтали отмечено ровно две клетки. Два расположения отмеченных клеток эквивалентны, если, меняя любое число раз вертикали и горизонтали между собой, мы из одного расположения можем получить другое. Сколько существует неэквивалентных расположений отмеченных клеток?
4. Множество клеток на клетчатой плоскости назовем *ладейно связным*, если из каждой его клетки можно попасть в любую другую, двигаясь по клеткам этого множества ходом ладьи (ладья разрешается перелетать через поля, не принадлежащие нашему множеству). Докажите, что ладейно связное множество из 100 клеток можно разбить на пары клеток, лежащих в одной строке или в одном столбце.
5. Таблица 50×50 заполнена натуральными числами таким образом, что все суммы чисел по строкам и столбцам равны. Какое наименьшее количество чисел надо изменить (мы сами выбираем каким образом), чтобы все эти 100 сумм стали попарно различны?
6. Имеется квадрат 100×100 , в каждой клетке которого ничего нет. За один ход Барсук берёт чётные пустые клеточки, образующие вершины прямоугольника, стороны которого параллельны сторонам квадрата, и помечает одну из них крестиком. Какое наибольшее количество клеточек может быть помеченным?
7. На координатной плоскости дан многоугольник (не обязательно выпуклый), стороны которого параллельны координатным осям. Для каждого его угла провели красную прямую, содержащую внутреннюю биссектрису угла. Докажите, что каждая из красных прямых пересекла чётное число других красных прямых.
8. Каждая клетка доски 41×41 окрашена в синий или красный цвет, причём клеток каждого из цветов не менее 780. Докажите, что можно выбрать 40 клеток: 20 синих и 20 красных таким образом, что никакие две выбранные клетки не стоят в одной строке или в одном столбце.
9. Назовем доской произвольный набор клеток на клетчатой плоскости. Набор ладей на доске называется *прекрасным*, если они не бьют друг друга, но бьют все остальные клетки доски. (Ладья бьет любую клетку, находящуюся с ней в одной строке или в одном столбце, даже если не все клетки между ними принадлежат доске.) Докажите, что если на некоторой доске можно поставить *прекрасный* набор из 2022 ладей и можно поставить прекрасный набор из 2024 ладей, то можно поставить и прекрасный набор из 2023 ладей.