

Бесконечное

1. На кружок по комбинаторике пришло счётное число школьников, и каждый решил одну задачу. У этого занятия есть особенность: школьник может отдать свой плюстик другому школьнику. Докажите, что школьники могут перераспределить свои плюстики так, что у каждого будет больше миллиона плюстиков.
2. Говорят, что слово A лексикографически меньше слова B , если первые i символов у них совпадают, а $i + 1$ символ слова A меньше $i + 1$ символа слова B .

Докажите, что не существует бесконечной лексикографически убывающей последовательности строк длины n , состоящих из натуральных чисел.

3. **Лемма Кёнига.** Докажите, что в бесконечном дереве, степень каждой вершины которого конечна, найдётся бесконечный простой путь.
4. За дядькой Черномором выстроилось чередой бесконечное число богатырей различного роста.

(а) Пусть рост каждого богатыря составляет целое число сантиметров. Докажите, что он может приказать части из них выйти из строя так, чтобы в строю осталось бесконечное число богатырей, стоящих в порядке возрастания.

(б) Пусть рост каждого богатыря не обязательно является целым. Докажите, что Черномор может приказать части из них выйти из строя так, чтобы в строю осталось бесконечное число богатырей, стоящих в порядке возрастания или убывания.

5. Вася хочет написать (конечную) программу на языке Python, которая задаёт функцию $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ (то есть программа получает на вход натуральное число n и возвращает $f(n)$). Докажите, что существует функция, для которой Вася не сможет написать такую программу.
6. Можно ли покрыть плоскость счётным набором углов с суммарной градусной мерой 1° ?
7. Семейство \mathcal{F} подмножеств \mathbb{N} таково, что для любых $A, B \in \mathcal{F}$ верно, что одно из них содержится в другом. Верно ли, что в \mathcal{F} не более, чем счётное число множеств?
8. Может ли набор непересекающихся кругов на плоскости быть более, чем счётным?
9. Можно ли раскрасить все точки квадрата и круга в чёрный и белый цвета так, чтобы множества белых точек этих фигур были подобны друг другу и множества чёрных точек также были подобны друг другу (возможно, с различными коэффициентами подобия)?