

Турниры

Определение. Турниром называется полный ориентированный граф.

Определение. Путь или цикл называется *гамильтоновым*, если он проходит по всем вершинам графа ровно один раз.

Определение. Ориентированный граф называется *сильно связным*, если из любой его вершины можно по рёбрам добраться до любой другой.

1. В некоторой стране каждый город соединен с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что найдется город, из которого можно добраться в любой другой.
2. В турнире в каждую вершину входит хотя бы одно ребро и из каждой хотя бы одно выходит. Докажите, что найдется цикл длины 3.
3. (а) Докажите, что в любом турнире есть гамильтонов путь.
(б) Докажите, что в любом сильно связном турнире есть гамильтонов цикл.
(в) В турнире нет циклов. Докажите, что вершины можно занумеровать таким образом, что каждое ребро ведет из вершины с меньшим номером в вершину с большим номером.
4. Докажите, что в произвольном турнире можно поменять направление не более одного ребра таким образом, чтобы он стал сильно связным.
5. 2^N волейбольных команд провели турнир в один круг (каждая команда сыграла с каждой один раз). Докажите, что можно выделить такие $N+1$ команд A_1, A_2, \dots, A_{N+1} , что для любых $i < j$ команда A_i выиграла у команды A_j .
6. Даны $N \geq 3$ точек, занумерованных числами $1, 2, \dots, N$. Каждые две точки соединены стрелкой от меньшего номера к большему. Раскраску всех стрелок в красный и синий цвета назовем однотонной, если нет двух таких точек A и B , что от A до B можно добраться и по красным стрелкам, и по синим. Найдите количество однотонных раскрасок.
7. Какое наибольшее количество циклов длины три может быть в турнирном графе на 11 вершин,
 - (а) если исходящая степень каждой вершины равна 5;
 - (б) турнир произвольный?