

## Ещё комбинаторная геометрия

- (а) На клетчатой плоскости отмечено 99 квадратов со стороной 100. Докажите, что найдётся 10000 клеток, покрытых нечётным числом квадратов.

(б) На плоскости отмечено 99 единичных квадратов со сторонами, параллельными осям координат. Все точки, покрытые нечётным числом квадратов, покрасили в черный. Докажите, что площадь черной части плоскости хотя бы 1.
- Существует ли на клетчатой плоскости замкнутая ломаная с нечётным числом звеньев одинаковой длины, все вершины которой лежат в узлах целочисленной решетки?
- Правильный шестиугольник  $ABCDEF$  разрезан на параллелограммы трёх типов: со сторонами, параллельными  $AB$  и  $BC$ ; со сторонами, параллельными  $BC$  и  $CD$ ; со сторонами, параллельными  $CD$  и  $AB$ . Докажите, что суммарные площади параллелограммов каждого типа равны.