

Комбинаторная геометрия

1. Прямая раскрашена в два цвета. Докажите, что найдётся отрезок, оба конца и середина которого покрашены в один и тот же цвет.
2. На плоскости отмечено 1984 точек, причем из любых трёх можно выбрать пару, расстояние между которыми меньше 1. Докажите, что их все можно покрыть двумя кругами радиуса 1.
3. Можно ли на плоскости расположить 2023 отрезка так, чтобы каждый отрезок обоими концами упирался строго внутрь других отрезков?
4. На плоскости дано N прямых ($N > 1$), никакие три из которых не пересекаются в одной точке и никакие две не параллельны. Докажите, что в частях, на которые эти прямые разбивают плоскость, можно расставить ненулевые целые числа, по модулю не превосходящие N , так, что суммы чисел по любую сторону от любой из данных прямых равны нулю.
5. Несколько прямых общего положения делят плоскость на части (никакие две прямые не параллельны, никакие три не пересекаются в одной точке). Докажите, что к каждой прямой примыкает хотя бы один треугольник.
6. Плоскость покрашена в 1000 цветов. Докажите, что найдётся прямоугольник с одноцветными вершинами.
7. На плоскости даны $n \geq 3$ точек. Пусть d — максимальное расстояние между любыми двумя из этих точек. Докажите, что отрезков длины d с концами в данных точках не более n .
8. Множество, состоящее из конечного числа точек плоскости, обладает следующим свойством: для любых двух его точек A и B существует такая точка этого множества, что треугольник ABC равносторонний. Сколько точек может содержать такое множество?