

Процессы

1. По окружности, сделанной из проволоки, двигаются (а) одинаковые; (б) разноцветные бусинки с одинаковой угловой скоростью, некоторые — по часовой стрелке, некоторые — против. При столкновении две бусинки разлетаются в разные стороны с прежними скоростями. Докажите, что в некоторый момент начальное расположение бусинок повторится.
2. По кругу расположены 30 монет, чередуясь: три подряд орлом, три решкой, три орлом, три решкой и т. д. Если у монеты два соседа лежат по-разному, её можно перевернуть. Какое наибольшее число монет можно положить орлом с помощью таких операций?
3. На доске написана последовательность букв А и Б. За один ход разрешается заменить последовательность букв АБ на последовательность букв БАААА. Может ли этот процесс продолжаться бесконечно?
4. В таблице размера $n \times n$ клеток: две противоположные угловые клетки — чёрные, а остальные — белые. Какое наименьшее количество белых клеток достаточно перекрасить в чёрный цвет, чтобы после этого с помощью преобразований, состоящих в перекрашивании всех клеток какого-либо столбца или какой-либо строки в противоположный цвет, можно было сделать чёрными все клетки таблицы?
5. В вершинах выпуклого n -угольника расставлены m фишек ($m > n$). За один ход разрешается передвинуть две фишки, стоящие в одной вершине, в соседние вершины: одну — вправо, вторую — влево. Докажите, что если после нескольких ходов в каждой вершине n -угольника будет стоять столько же фишек, сколько и вначале, то количество сделанных ходов кратно n .
6. На плоскости заданы $2n$ точек — n синих и n красных, причём никакие три точки не лежат на одной прямой. Докажите, что можно провести n отрезков так, что у каждого отрезка один конец лежит в красной точке, другой — в синей точке, и никакие два отрезка не имеют общих точек.
7. Есть n овец, некоторые из которых дружат, и волк в овечьей шкуре. Цель волка — съесть всех овец. Изначально волк может подружиться с каким-то набором овец. Потом он начинает есть овец, причем можно съесть только своего друга. Когда волк съедает овцу А, все ее друзья, не дружившие до этого с волком, начинают с ним дружить, дружившие — прекращают. Известно, что изначально овцы дружат так, что у волка есть m способов выбрать себе начальный набор друзей, при котором он может съесть всех. Чему равно максимальное возможное значение m ?
8. Дано натуральное число. Разрешается расставить между цифрами числа плюсы произвольным образом и вычислить сумму (например, из числа 123456789 можно получить $12345 + 6 + 789 = 13140$). С полученным числом снова разрешается выполнить подобную операцию, и так далее. Докажите, что из любого числа можно получить однозначное, выполнив не более 10 таких операций.