Бинарный куб

Бинарным кубом (или *булевым кубом*) размерности n будем называть граф, вершинами которого являются всевозможные последовательности $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ из n нулей или единиц; две вершины соединены ребром, если их последовательности отличаются ровно в одном разряде.

1. Найдите количество **(а)** рёбер; **(б)** циклов длины 4 в бинарном кубе размерности n.

2. Докажите, что для любого $n \geqslant 2$ в n-мерном бинарном кубе есть цикл, проходящий по всем вершинам ровно по одному разу.

3. Рассмотрим множество всевозможных строк длины n из **(а)** 0 или 1; **(б)** из 0, 1 или 2. Какое наибольшее число строк можно выбрать так, чтобы любые два выбранные строки совпадали бы хотя бы в одном разряде?

4. Из n-мерного бинарного куба удалили две противоположные вершины. Для каких натуральных n оставшиеся вершины можно разбить на доминошки (пары смежных)?

5. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ — различные подмножества n-элементного множества $\mathcal{X}$. Докажите, что существует такой элемент $x \in \mathcal{X}$, для которого множества $A_1 \cup \{x\}, A_2 \cup \{x\}, \dots, A_n \cup \{x\}$ попарно различны.

6. На ютуб-канал подписаны 9 человек. Владелец канала ежедневно проводит фан-встречи. Докажите, что подписчики могут посещать фан-встречи в течение 512 дней так, чтобы состав участников ежедневно менялся ровно на одного человека и никогда не повторялся, а также чтобы на первой фан-встрече были все, а на последнюю никто не пришёл.

7. Дано дерево T с n рёбрами. Докажите, что множество рёбер бинарного куба размерности n можно раскрасить в несколько цветов так, чтобы рёбра каждого цвета образовывали дерево, изоморфное дереву T.