Программа зачёта

Ко всем вопросам прикреплена ссылка либо на Группа в Хеопсе (и первой, и второй групп), где есть разбор, либо на другое место с разбором.

Во всех теоретических вопросах нужно знать не только формулировку, но и доказательство.

Теория

Алгебра

1. Формула Лежандра для степени вхождения простого числа p в $n!$. Группа 1, Группа 2
2. Транснеравенство. Сириус.Курсы
3. Неравенства средних для 2, 3, 4 переменных. Сириус.Курсы
4. Функция Эйлера: мультипликативность и явная формула. Группа 1, Группа 2
5. Квадратичные иррациональности, два эквивалентных определения. Сопряжение. Сопряжённое от корня многочлена с рациональными коэффициентами — тоже корень. Группа 1, Группа 2

Геометрия

1. Формула Пика. Сириус.Курсы.
2. Длины отрезков касательных к вписанной и вневписанной окружностям. Группа 1, Группа 2
3. Ещё один признак вписанности. Про четырехугольник $ABCD$ известно, что $\angle ABD = \angle CBD$, $AD = CD$. Тогда $ABCD$ — либо дельтоид, либо вписанный. Сириус.Курсы
4. Отражение ортоцентра относительно стороны и середины стороны. Расстояние от вершины до ортоцентра вдвое больше, чем расстояние от центра описанной окружности до соответствующей стороны. Окружность Эйлера. Сириус.Курсы 1, Сириус.Курсы 2
5. Лемма о трезубце, внешняя лемма о трезубце. Сириус.Курсы 1, Сириус.Курсы 2

6. Метрические критерии вписанности и касания. Сириус.Курсы
7. Антипараллельность. Симедиана. Основное свойство симедианы. Отношение, в котором симедиана делит противоположную сторону. Точка Болтая. Группа 1, Группа 2
8. Гармонический четырёхугольник, несколько эквивалентных определений. Группа 1, Группа 2

Комбинаторика

1. Формула включений-исключений. Группа 1, Группа 2
2. Ориентированные графы. Компонента сильной связности, структура связного, но не сильно связного графа. Сириус.Курсы
3. Турниры. Существование гамильтонова пути, существование гамильтонова цикла в сильно связном турнире. Сириус.Курсы
4. Выпуклость. Три эквивалентных определения выпуклого многоугольника. Выпуклая оболочка, существование выпуклой оболочки конечного множества точек. Группа 1, Группа 2
5. Существование триангуляции, существование ушей в триангуляции. Группа 1, Группа 2
6. Перестановки. Представление перестановки в виде объединения нескольких циклов. Чётность перестановки, чётность произведения двух перестановок. Группа 1, Группа 2

Задачи

Алгебра

1. Докажите, что существует бесконечно много таких троек натуральных чисел a, b, c, что $a^{21} + b^{23} = c^{22}$. Группа 1, Группа 2
2. Для положительных чисел x, y, z докажите неравенство

$$x + y + z \geqslant \frac{x(y+1)}{x+1} + \frac{y(z+1)}{y+1} + \frac{z(x+1)}{z+1}.$$

   Группа 1, Группа 2

3. Длины сторон многоугольника равны a_1, a_2, ..., a_n. Квадратный трёхчлен $f(x)$ таков, что
$$f(a_1) = f(a_2 + a_3 + \ldots + a_n).$$
Докажите, что если A — сумма длин нескольких сторон этого многоугольника, а B — сумма длин оставшихся, то $f(A) = f(B)$. Разбор

4. Можно ли выбрать 100 последовательных чётных чисел и разбить их на пары (a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_{50}, b_{50}) так, чтобы каждый из 50 трёхчленов
$$x^2 + a_1x + b_1,\ x^2 + a_2x + b_2,\ \ldots,\ x^2 + a_{50}x + b_{50}$$
имел целые корни? Разбор

5. Положительные числа a, b, c удовлетворяют неравенству $abc \geqslant ab + bc + ca$. Докажите, что
$$\sqrt{abc} \geqslant \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$
Задача 11.2

6. Рациональные числа q, s таковы, что сумма $\sqrt{q} + \sqrt[3]{s}$ рациональна. Докажите, что каждое из чисел $\sqrt{q}$, $\sqrt[3]{s}$ рационально. Группа 1, Группа 2

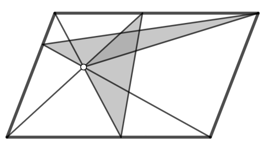
7. Обозначим через $Q(x)$ следующую сумму:
$$Q(x) = [x] + \left[\frac{x}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{x}{10000}\right].$$
Найдите значение $Q(2000) - Q(1999)$. Группа 1, Группа 2

8. Разложите на множители $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$. Группа 1, Группа 2

9. Найдите тысячную цифру после запятой числа $\left(2 + \sqrt{5}\right)^{2024}$. Группа 1, Группа 2

Геометрия

1. Внутри параллелограмма выбрана точка. Через неё и три вершины проведены прямые до пересечения со сторонами параллелограмма (см. рисунок). Докажите, что площади серых треугольников равны. Группа 1, Группа 2

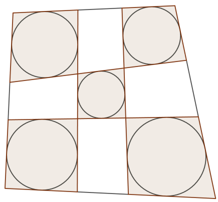


Группа 1, Группа 2

2. В трапеции $ABCD$ на боковой стороне AB дана точка K. Через точку A провели прямую ℓ, параллельную прямой KC, а через точку B — прямую m, параллельную прямой KD. Докажите, что точка пересечения прямых ℓ и m лежит на стороне CD. Группа 1, Группа 2

3. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1, CC_1 и биссектриса AL. Оказалось, что середина отрезка AL лежит на отрезке B_1C_1. Найдите угол BAC. Группа 1, Группа 2

4. Выпуклый четырехугольник разбили на 9 меньших четырехугольников как показано на рисунке. Известно, что в каждый из закрашенных четырехугольников можно вписать окружность. Докажите, что и в исходный четырехугольник можно вписать окружность.



Группа 1, Группа 2

5. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного неравнобедренного треугольника ABC пересекаются в точке H. Описанная окружность треугольника AB_1C_1 пересекает описанную окружность треугольника ABC вторично в точке K. Докажите, что прямая KH делит отрезок BC пополам. Сириус.Курсы

6. Отрезок, соединяющий середины меньших дуг AB и AC описанной окружности треугольника ABC, пересекает стороны AB и AC в точках P и Q соответственно. Докажите, что $APIQ$ — ромб, где I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Сириус.Курсы

7. Из точки P вне окружности ω с центром в точке O проведены касательные PA и PB к окружности ω (A и B — точки касания), а также через точку P проведена секущая, пересекающая окружность ω в точках C и D. Докажите, что середина отрезка AB лежит на описанной окружности треугольника COD. Сириус.Курсы

8. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC высоты AA_1, BB_1, CC_1

пересекаются в точке H, а точка O — центр описанной окружности ABC. Докажите, что точка, симметричная A относительно B_1C_1, лежит на описанной окружности треугольника A_1OH. Разбор

9. Медиана AM треугольника ABC пересекает вписанную в него окружность в точках X и Y. Известно, что $AB = AC + AM$. Найдите $\angle XIY$, где I — центр вписанной окружности. Сириус.Курсы

10. Дан треугольник ABC. Касательная к его описанной окружности в точке A пересекает прямую BC в точке D. Касательные к (ACD) в точках A и C пересекаются в точке K. Докажите, что прямая DK делит пополам отрезок AB. Группа 1, Группа 2

11. Пусть P и Q — основания внутренней и внешней биссектрис угла A треугольника ABC. Докажите, что общая хорда (ABC) и (APQ) содержит симедиану треугольника ABC. Группа 1, Группа 2

Комбинаторика

1. В таблице 20×20 в каждой клетке стоит крестик или нолик, причем в каждом столбце ровно 10 крестиков и 10 ноликов. Докажите, что можно найти две строки, которые совпадают, по крайней мере, в 10 позициях. Группа 1, Группа 2

2. Докажите, что в бесконечном дереве, степень каждой вершины которого конечна, найдётся бесконечный путь. Группа 1, Группа 2

3. В классе 20 учеников, каждый из которых дружит ровно с шестью одноклассниками. Найдите число таких различных компаний из трёх учеников, что в них либо все школьники дружат друг с другом, либо никакие двое не дружат друг с другом. Группа 1, Группа 2

4. Про связный ориентированный граф известно, что если мы выйдем из любой вершины A по любому ребру, то потом сможем вернуться по ребрам в вершину A. Докажите, что граф сильно связный. Сириус.Курсы

5. Докажите, что из сильно связного турнира можно удалить вершину так, что он останется сильно связным. Сириус.Курсы

6. На плоскости расположены n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что существует многоугольник с вершинами в этих точках.

Два доказательства: через процесс уменьшения длины, через упорядочивание. Разбор

7. На плоскости расположены 5 точек общего положения. Докажите, что 4 из них являются вершинами выпуклого многоугольника. Группа 1, Группа 2

8. Выпуклый многоугольник разрезан непересекающимися диагоналями на равнобедренные треугольники. Докажите, что в этом многоугольнике найдутся две равные стороны. Группа 1, Группа 2

9. Дана строчка из 25 цифр. Всегда ли можно расставить в этой строчке знаки арифметических операций $+, -, \times, :$ и скобки так, чтобы образовалось числовое выражение, равное 0? Последовательно стоящие цифры можно объединять в числа, но порядок цифр изменять нельзя. Группа 1, Группа 2

10. Последовательность из 247 нулей, единиц и двоек начинается с пяти нулей. Среди пятёрок подряд стоящих цифр встречаются все 243 возможные комбинации. Какими могут быть последние пять цифр последовательности? Группа 1, Группа 2

11. Ярослав придумал комбинацию поворотов кубика Рубика, изменяющую его, а потом взял собранный кубик и повторил эту комбинацию поворотов 101 раз. Докажите, что он не мог получить собранный кубик. Группа 1, Группа 2

12. В квадрат 4×4 кладут 15 фишек, на которых написаны числа от 1 до 15. Одна клетка при этом остаётся пустой. Можно двигать на пустую клетку соседнюю по стороне фишку. Докажите, что таким образом из первой конфигурации нельзя получить вторую. Группа 1, Группа 2

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Рис. 1: к задаче 12

13. На столе лежат n куч, в которых $a_1, a_2, \ldots, a_n$ камней. Двое по очереди берут любое количество камней из любой кучи. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Докажите, что у второго есть выигрышная стратегия тогда и только тогда, когда побитовая сумма чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равна нулю. Группа 1, Группа 2