Летние сборы в «Команде», ключевые теория и задачи

Ниже представлены теория и задачи со сборов, которые мы считаем самыми важными. Тем, кто не был на сборах, рекомендуется самостоятельно изучить их для полноценной дальнейшей работы на кружке. Полные материалы сборов выложены на странице кружка.

Теория

Алгебра

1. Неравенства средних для n переменных.
2. Метод Штурма. Изменение значений выражений ab, a^n+b^n, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ при изменении чисел a и b при фиксированной сумме $a+b$. Изменение значений выражений $a+b$, a^n+b^n, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ при изменении чисел a и b при фиксированном произведении ab.
3. Неравенство Коши – Буняковского – Шварца (КБШ). КБШ для дробей.

Геометрия

1. Движения плоскости: симметрия, параллельный перенос, поворот, скользящая симметрия. Композиция движений: композиция симметрий относительно двух прямых, композиция поворотов. Теорема Шаля.
2. Гомотетия, её основные свойства. Гомотетичность треугольников с параллельными сторонами.

Задачи

Алгебра

1. Для неотрицательных a, b, c докажите, что $a^5+b^5+c^5 \geqslant abc(a^2+b^2+c^2)$.
2. На плоскости с введённой декартовой системой координат Oxy нарисован многоугольник. Рассматривается некоторое выражение вида $z = ax+by$, где a, b — константы, а точка (x, y) лежит внутри многоугольника (возможно на границе). Докажите, что максимум этого выражения достигается в вершинах многоугольника.

3. Сумма неотрицательных чисел a, b, c, d равна 4. Докажите неравенство

$$(a^2 + b^2)cd + (c^2 + d^2)ab \leqslant 4.$$

4. **Неравенство Несбитта.** Для положительных чисел a, b, c докажите, что

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Геометрия

1. В треугольник вписана окружность и к ней проведены касательные, параллельные сторонам треугольника и отличные от сторон. Докажите, что противолежащие стороны образовавшегося шестиугольника попарно равны, а три большие диагонали пересекаются в одной точке.

2. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность ω. Точки E и F симметричны точке A относительно середин сторон BC и CD. Окружность (CEF) вторично пересекает ω в точке X. Докажите, что AX — диаметр ω.

3. Вписанная в треугольник ABC окружность касается стороны BC в точке A_1. На биссектрисах углов B и C выбраны точки X и Y соответственно так, что $\angle XA_1Y = 90°$. Докажите, что $\angle XAY = \frac{\angle A}{2}$.

4. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB, AC, BC в точках C', B', A' соответственно. Точки A_1, B_1, C_1 — середины дуг BC, AC, AB описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что прямые A_1A', B_1B', C_1C' пересекаются в одной точке.

5. Вписанная окружность треугольника ABC касается его стороны BC в точке D. Пусть DT — диаметр вписанной окружности. Прямая AT пересекает сторону BC в точке X. Докажите, что $BD = CX$.

Комбинаторика

1. Даны натуральные числа n и k, $k < n$. В фирме работают n сотрудников, зарплата каждого из которых выражается натуральным числом рублей. Каждый месяц начальник поднимает зарплату на 1 рубль некоторым k сотрудникам. При каких n и k он сможет сделать все зарплаты равными вне зависимости от начального распределения зарплат?

2. Компания из 1024 друзей — завсегда́таи клуба интеллектуальных игр. На каждую игру выставляется команда из четырёх человек. Какое минимальное число игр потребуется друзьям для того, чтобы любые трое из них хотя бы раз оказались в одной команде?

3. Фокусник с помощником показывают фокус. Зритель выбирает любые две из 13 стоящих в ряд изначально пустых шкатулок и в присутствии помощника кладёт туда по конфете. Затем приходит фокусник. Помощник открывает одну шкатулку, в которой нет конфеты. Далее фокусник должен выбрать четыре шкатулки и одновременно открыть. Как фокуснику и помощнику договориться так, чтобы обе конфеты оказались в открытых шкатулках?

4. Внутри правильного треугольника отмечена точка. Её отразили несколько раз относительно сторон треугольника (в каком-то порядке), и она опять попала внутрь треугольника. Докажите, что она вернулась на исходное место.